千葉商大論叢　第 59 巻　第 3 号（2022 年 3 月）pp. 51-57

〔論　説〕

余剰分配問題における Shapley 値流の解の特徴付けについて†

内　海　幸　久

1　序

余剰分配問題とは，n 人の主体が資金を提供しプールした資金を利用して資金運用をした結果である余剰を全員で分け合うという問題である。このような余剰分配の状況で，どの様に余剰を配分するべきか，また，解と呼ばれる配分規則の公理的な特徴は何かを考察することが余剰分配問題の主要な研究課題である。この問題は交渉問題や破産問題，費用分担問題という形でも研究されており，実社会でも既知である平等解・比例解の公理化，様々な解概念が提案されている。比例解をはじめ代表的な配分方法は，社会でも広く利用されている。Moulin (2002) や Thomson (2015) にその概要がまとめられている。本研究の主要な目的は，比例的な性質や平等の性質を受け継ぐ新しい解の概念である Shapley 値流の解概念を提案し，その公理的な性質を明らかにすることである。具体的には，提携形ゲームの解概念である Shapley 値の公理を余剰分配問題に応用し，その満たすべき解を求めるというものである。本稿では，余剰分配問題において，効率性，対称性，ナル，加法性を満たす解は，線形の Nash 交渉解になることを明らかにした。比例的な性質と平等解の性質を持つ解の計算は，Shapley 値的な性質を持つものの，階乗計算を経由する必要がないため，比較的計算コストが低いこともわかる。

2　余剰分配問題の解

$N = \{1, ..., n\}$ をプレイヤーの集合とする。$n{+}1$ 次元ベクトル $s = (\pi, d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$ について $\pi \geq \sum_{i=1}^n d_i$ である時，s は余剰分配問題と呼ばれる。π は余剰，d_i はプレイヤー i の貢献度と解釈される。また，$d = (d_1, ..., d_n)$ を交渉決裂点と見なすと s は交渉問題の一種となる。n 人余剰分配問題の集合を $\mathcal{S} = \{(\pi, d)|\pi \geq \sum_{i\in N} d_i\}$ と表記する。余剰分配問題の解とは，$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ という関数であり，構成要素である $f_i(\pi, d_1, ..., d_n)$ は，プレイヤー i の取り分と解釈される。ベクトル記法の簡略化のため d_S と $(d_S, d_{N\setminus S})$ を定義する。プレイヤーの部分集合 $S \subset N$ について，d_S によって $(d_i)_{i\in S}$ を，$(d_S, d_{N\setminus S})$ によって $(d_1, d_2, ..., d_n)$ を表す。

余剰分配問題の代表的な解概念である比例解についてはその必要十分条件が明らかにされている。本稿では Shapley 値の公理を余剰分配問題に応用した，貢献度に応じつつ，平等に分配する解概念を提案する。

定義 1.
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について，$\sum_{i=1}^n f_i(\pi, d) = \pi$ が成立する時，解 f は効率性を満たすと呼ばれる。

効率性は余剰 π をすべて配分すると解釈される。

†本研究は 2021 年度千葉商科大学学術助成金による研究成果である。ここに記して感謝の意を表す。

定義 2.
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について，$d_i = 0$ となる $i \in N$ に関して $f_i(\pi, d) = 0$ が成立する時，解 f は 0 賞金を満たすと呼ばれる。

0 賞金とは，貢献度が 0 のプレイヤーについては取り分も 0 にするという意味になる。

定義 3.
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について，$f_i(\pi, d) \geq 0$ が $i \in N$ で成立する時，解 f は非負性を満たすと呼ばれる。

全員の取り分は 0 以上の値になるのが非負性である。

定義 4.
任意の $i, j \in N$，$d_i, d_j, d'_i, d'_j \in \mathbb{R}^n_+$ について $d_i + d_j = d'_i + d'_j$ とする。この時，

$$f_i(\pi, d_i, d_j, d_{N\setminus\{i,j\}}) + f_j(\pi, d_i, d_j, d_{N\setminus\{i,j\}}) = f_i(\pi, d'_i, d'_j, d_{N\setminus\{i,j\}}) + f_j(\pi, d'_i, d'_j, d_{N\setminus\{i,j\}})$$

が満たされるならば，解 f は耐ペア再配分性を満たすと呼ばれる。

２人の貢献度の和を一定に保ちつつ貢献度を変更する状況を考える。全体の貢献度の和は変わらない状況である。耐ペア再配分性は，新しい状況での取り分の和は変更前の取り分の和と等しいといという意味である。比例解に関しての特徴付けは，幾つか存在し Moulin (2002) に詳細が記されている。Ju, Miyagawa and Sakai (2007) で示されている定理を紹介する。

命題　(Ju, Miyagawa and Sakai)
余剰分配問題 $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ において，効率性，0 賞金，非負性，耐ペア再配分性を見たす解 f は唯一存在し，その解は，

$$f_i(\pi, d) = \frac{d_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i}\pi$$

と求められる。

　余剰分配問題における平等解と比例解の中間に位置するような，貢献度に応じた公平な分け方となる解はどのような形になるのだろうか。提携形ゲームの解概念である Shapley (1953) 値の公理を余剰分配問題に応用して貢献度に応じた公平な分け方となる解を導く。Shapley 値の公理は，効率性，対称性，ナル，加法性の 4 種類が基本的な公理とされている。

定義 5.
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について，$d_i = d_j$ であるならば $f_i(\pi, d) = f_j(\pi, d)$ が成立する時，解 f は対称性を満たすと呼ばれる。

対称性とは貢献度が等しいのであれば取り分も等しいという意味である。

定義 6.
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について

$$\sum_{i \in S} d_i = \pi$$

を満たすプレイヤーの真部分集合 $S \subset N$ が存在する時，$j \in N \setminus S$ をナルプレイヤーと呼ぶ。

$N \setminus S$ をナルプレイヤーの集合とする。$\pi \geq \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in S} d_i + \sum_{i \in N \setminus S} d_i = \pi + \sum_{i \in N \setminus S} d_i$ が成り立つ。すべての i について $d_i \geq 0$ であることから j がナルプレイヤーならば $d_j = 0$ となる。しかし，$d_k = 0$ であるからと言って，プレイヤー k がナルプレイヤーであるとは限らない。$(\pi, 0, ..., 0)$ という余剰分配問題において，プレイヤー i の貢献度は $d_i = 0$ であるがナルプレイヤーではない。

定義 **7.**
任意の $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ について， プレイヤー j がナルプレイヤーであるならば $f_j(\pi, d) = 0$ となる時，解 f はナルを満たすと呼ばれる。

解がナルとは，余剰分配問題において追加的な貢献が全くないナルプレイヤーの取り分は 0 になるという意味である。

定義 **8.**
任意の $(\pi, d), (\pi', d') \in \mathcal{S}$ について，

$$f(\pi + \pi', d + d') = f(\pi, d) + f(\pi', d')$$

が成り立つ時，解 f は加法性を満たすと呼ばれる。

異なる余剰分配問題の和の取り分は，それぞれの余剰分配問題の取り分の和と等しいと解釈される。

命題
余剰分配問題 $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ において，効率性，対称性，ナル，加法性を満たす解 f は唯一存在し，その解 f は，

$$f_i(\pi, d) = \frac{1}{n}\left(\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i\right) + d_i$$

と求められる。

証明
任意の $(\pi, d_1, ..., d_n) = (\pi, d) \in \mathcal{S}$ は，$(1, 0, ..., 0), (1, 1, 0, ..., 0), ..., (1, 0, ..., 0, 1)$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底ベクトルとなっていることを利用して，

$$\begin{pmatrix} \pi \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = (\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + d_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $n+1$ 個のベクトルで一意に分解できる。

解 f が効率性，対称性，ナル，加法性を満たすとする。余剰分配問題 $(\pi, 0, ..., 0)$ を考える。効率性と対称性より，$(\pi, 0, ..., 0)$ の解は任意の i について

$$f_i(\pi, 0, ..., 0) = \frac{\pi}{n}$$

となる。余剰を d_i，プレイヤー i の貢献度を d_i，プレイヤー $j \neq i$ の貢献度を 0 とする余剰分配問題 $(d_i, 0, ..., 0, d_i, 0, ..., 0)$ を考える。プレイヤー i 以外はナルプレイヤーとなる。効率性とナルより解 f は

$$f_k(d_i, 0, ..., 0, d_i, 0, ..., 0) = \begin{cases} d_i & \text{if } k = i \\ 0 & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

となる。任意の余剰分配問題 $(\pi, d) \in \mathcal{S}$ を考える。加法性より (π, d) の解は，

$$\begin{aligned} f(\pi, d) &= f\left((\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i, 0, ..., 0) + (d_1, d_1, 0, ..., 0) + \cdots + (d_n, 0, ..., 0, d_n)\right) \\ &= f(\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i, 0, ..., 0) + f(d_1, d_1, 0, ..., 0) + \cdots + f(d_n, 0, ..., 0, d_n) \\ &= \frac{\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i}{n} + (d_1, 0, ..., 0) + \cdots + (0, ..., 0, d_n) \\ &= \frac{\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i}{n} + (d_1, d_2, ..., d_n) \end{aligned}$$

となる。よって，$i = 1, ..., n$ について

$$f_i(\pi, d) = \frac{1}{n}\left(\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i\right) + d_i$$

を得る。

$f_i(\pi, d) = \frac{1}{n}(\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i) + d_i$ の形状から f が効率性，対称性，加法性は満たされる。f がナルであることを示す。ある $S \subset N$ について $\sum_{i \in S} d_i = \pi$ とする。$j \in N \setminus S$ はナルプレイヤーとなるので $d_j = 0$ となる。よって，$f_j(\pi, d) = 0$ を得る。 □

解 $f(\pi, d) = \frac{1}{n}(\pi - \sum_{i=1}^{n} d_i) + d$ は，Nash(1950) 交渉解を線形にした形と等しくなる。この解を本稿では線形 Nash 解と呼ぶこととする。余剰分配問題において，Shapley 値流の公理を応用すると，その解概念は，線形 Nash 解になることがわかる。Shapley 流の公理から導かれているという意味で線形 Nash 解は各プレイヤーの貢献度に応じた公平な分け方と解釈をすることができる。Nash 交渉解の形をしているので，以下の 2 つの性質を満たすことがすぐにわかる。

定義 9.
任意の $a > 0$ について解 f が $f(a\pi, ad) = af(\pi, d)$ を満たす時，f はスケール不変性を満たすと呼ばれる。

定義 10.
任意の $a = (a_1, ...a_n) \in \mathbb{R}^n$ について解 f が $f(\pi + \sum_{i=1}^{n} a_i, d + a) = f(\pi, d) + a$ を満たす時，f は平行移動不変性を満たすと呼ばれる。

定義 11.
ある真部分集合 $S \subset N$ について $\sum_{i \in S} d_i = \pi$ の時，$\sum_{i \in S} f_i(\pi, d) = \pi$ が成り立つならば，解 f は S キャリアを満たすと呼ばれる。

S キャリアはナルに似た性質を持っているが，厳密には同値ではない。S キャリアを満たしても，f がナルとは限らない。ナルプレイヤー $j \in N \setminus S$ について $f_j(\pi, d) < 0$ となることがあり得る。しかし，解 f が効率性と非負性を満たす場合，解が S キャリアであるなら $\pi = \sum_{i \in N} f_i(\pi, d) = \sum_{j \in S} f_j(\pi, d) + \sum_{j \in N \setminus S} f_j(\pi, d) = \pi + \sum_{j \in N \setminus S} f_j(\pi, d)$ となり，$\sum_{j \in N \setminus S} f_j(\pi, d) = 0$ を得る。f の非負性から，各 $j \in N \setminus S$ について $f_j(\pi, d) = 0$ をが成立する。効率性，非負性，S キャリアからナルが導出されることになる。また，解 f が効率性とナルを満たすなら S キャリアとなる。実際，ある $S \subset N$ について $\sum_{j \in S} d_j = \pi$ が成立している時，プレイヤー $j \in N \setminus S$ はナルプレイヤーとなる。f が効率性とナルを満たすので，$\pi = \sum_{i \in N} f_i(\pi, d) = \sum_{j \in S} f_j(\pi, d) + \sum_{j \in N \setminus S} f_j(\pi, d) = \sum_{j \in S} f_j(\pi, d)$ を得る。よって f は S キャリアとなる。これらより，以下の命題を得る。

命題

1. 線形 Nash 解は，効率性，非負性，耐ペア再配分を満たすが，0 賞金を満たすとは限らない。
2. 比例解は，効率性，対称性，ナルを満たすが，加法性を満たすとは限らない。
3. 線形 Nash 解は，スケール不変性，平行移動不変性，S キャリアを満たす。
4. f が効率性，ナルを満たすなら，f は S キャリアを満たす。
5. f が効率性，非負性，S キャリアを満たすなら，f はナルを満たす。

線形 Nash 解と比例解の違いを際立たせる解の性質が，0 賞金や加法性であることがわかる。命題の 5 番目より，次の主張が成立する。

系

効率性，対称性，非負性，S キャリア，加法性を満たす解は唯一存在し，線形 Nash 解となる。

3　帰結

余剰分配問題において，効率性，対称性，ナル，加法性を満たす解は，唯一存在し，その形は線形 Nash 交渉解になることを示した。Shapley 値の公理を余剰分配問題に応用すると交渉問題の解概念である Nash 解の特殊ケースになるという結果を得た。また，ナルの性質を非負性，S キャリアに置き換えることも可能である。平等解・比例解のハイブリッド解と線形 Nash 交渉解の関係は不明な部分もあり，今後検討するべき課題であろう。

参考文献

Ju, B. G., E. Miyagawa and T. Sakai (2007) "Non-manipulable division rule in claims problems and generalization", *Journal of Economic Theory*, 132: 1-26.

Moulin, H. (2002) "Axiomatic cost ans surplus sharing", *Handbook of Social Choice and Welfare* Vol. 1: 289-357.

Nash, J.F. (1950) "The bargaining problem", *Econometrica*, 18: 155-162.

Shapley, L. S. (1953) "A value for n-person games", *Annals of Mathematics Studies*, 28: 307-318.

Thomson, W. (2015) "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: An update", *Mathematical Social Sciences*, 74: 41-59.

（2022.1.18 受稿，2022.2.15 受理）

〔抄　録〕

余剰分配問題において Shapley 値流の公理から導かれる解概念が線形の Nash 交渉解であることを，本研究では明らかにした。具体的には，効率性，対称性，ナル，加法性を満たす余剰分配問題の解は，唯一存在し，それは線形の Nash 交渉解で与えられる。