

平成 25 年度

博士論文

銀行における市場リスク計測に関する一研究

－損失データに非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定－

A Study on Market Risk Measurement of Banks

The Value-at-Risk Estimates Fitting Non-normal Distributions to the Loss Data

千葉商科大学大学院

政策研究科博士課程

吉田 洋一

論文要旨

Value-at-Risk は、保有するポートフォリオ（資産・負債）の価値が変動することで、将来、損失を被ると予想されるリスク量を、ひとつの金額で表示するリスク計測のスタンダードである。リスク量の計量化は金融機関の市場リスクから始まり、信用リスク・オペレーショナルリスクでも市場リスクと同じように Value-at-Risk の概念に従ってリスク量を計測している。

Value-at-Risk 推定手法には、代表的な 3 つの手法がある。第一に分散共分散法があり、最もポピュラーな手法となっている。第二に、ヒストリカル・シミュレーション法に代表されるヒストリカル法がある。第三に、乱数を発生させてシミュレーションするモンテカルロ法がある。我が国では 2003 年に起きた VaR ショック以降、分散共分散法からヒストリカル・シミュレーション法に移行する大手銀行が増加した。それ以前では圧倒的に分散共分散法が採用されることが多く、現在でも地方銀行を中心に分散共分散法を採用している銀行は多い。

では、分散共分散法やヒストリカル法で問題とすべきデメリットはあるのだろうか。たとえば、分散共分散法のデメリットとして正規分布を仮定していることが挙げられる。つまり、実際の金融データは正規分布では捉えきれず、裾が厚い、いわゆるファットテイルな分布となることが多く、正規分布を仮定した Value-at-Risk は過小評価する可能性が高い。一方、ヒストリカル法のデメリットとして過去データへの依存が強いことが挙げられる。すなわち、過去に起きた損失額しか Value-at-Risk 推定値になりえない。これはリスクの予測としては十分とは言い難い。また、安定期にはリスクファクター変動に対する感応度が低く、一旦変動が始まると大きく変動する傾向がある。特にリスクレベルが高くなると高止まりする嫌いがある。

本研究は、正規分布を仮定した分散共分散法を採用している銀行の経営陣に向け、分散共分散法より精緻にリスク量を把握できる新たな手法を提言するものである。特に、バンキング勘定のリスク把握に役立ち、かつ、資本配賦にも活用できることを考慮している。また、単一のリスクファクターのみならずポートフォリオのリスク計測にも対応する。さらに、リーマン・ショックという現実に起きた、最悪のイベントを含んだ時系列データを使用することにより、非正規分布を仮定する手法、すなわち、経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を使って、現実の損失率の観測分布に適合した確率分布を仮定する方法の優位性を検証する。

本研究においては、次の3つの貢献を行っている。第1に、日々変動する収益率の観測分布に適合する確率分布を仮定することに重点を置いている。これは実務的な視点から着目した概念であり、特定の確率分布を仮定するという点はヒストリカル法としては独特ではあるが、ヒストリカルデータを基礎とする点でヒストリカル法の概念に則っている。第2に、同時に8種類の非正規分布を仮定し Value-at-Risk 推定を実施して結果を評価している。リスクファクターや異なる保有期間、あるいはポートフォリオ特性により、それぞれ分布の形状が大きく異なるため、対応できる確率分布は多い方が良い。特にジョンソン分布を中心に一般化ロジスティック分布、双曲線正割分布、ワイブル分布という従来あまり使われていない確率分布も対象としており、いずれの非正規分布も適合状況は良好である。第3に、ファットテイル性の問題においては、提案する方法に基づく予測値の分位点と観測分布に基づく分位点との乖離の程度を捉えるという形で「ファットテイルの問題」の影響が比較的小さいことを確認している。

最後に、提案する方法により算出した Value-at-Risk 推定値の検証として、トレーディング勘定のバックテストのフレームワークを準用している。このフレームワークの前提となっている保有期間1日の場合、各非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定では正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定より超過回数が少なくなり、非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定の優位性を確認している。

今後の課題としては、本研究の提言をさらに進展させて、モンテカルロ・シミュレーションを適用する手法へとステップする足がかりとしたい。

目 次

序 章	1
1. 問題の所在	1
2. 研究方法と範囲	2
3. 論文の構成	5
第 1 章 Value-at-Risk 推定とファットテイル問題	10
1.1 Value-at-Risk の概要	11
1.2 Value-at-Risk の前提	16
1.3 Value-at-Risk の役割	22
1.4 収益率分布におけるファットテイル問題	25
1.4.1 ファットテイルの視覚化	25
1.4.2 ファットテイルへの対応	28
第 2 章 収益率分布における非正規分布への対応	32
2.1 はじめに	32
2.2 Value-at-Risk 推定の計測と結果	33
2.2.1 Value-at-Risk 推定の計測	36
2.4.2 Value-at-Risk 推定の結果	36
2.3 Value-at-Risk 推定の結果分析	39
2.3.1 1 時点における 4 つの統計量の分析	39
2.3.2 4 分布の比例関係の考察	48
2.3.3 統計量（平均，標準偏差，歪度，尖度）変動の考察	49
2.4 損益の実現値と推定値の比較（バックテスト）	57
2.4.1 バックテストの手順	59
2.4.2 バックテストの分析結果	65

2.5	考察	66
	Appendix A : ジョンソン SU 分布のパラメータについて	69
	Appendix B : 3 moment-VaR について	72
	Appendix C : 追加分析について	74
第 3 章	収益率の観測分布の適合度	80
3.1	はじめに	80
3.2	Value-at-Risk 推定の前提条件	83
3.3	収益率分布の適合度分析	84
3.3.1	適合度分析の方法	85
3.3.2	ファットテイル性の判定	85
3.3.3	正規性の検定	95
3.3.4	適合性の検定	99
3.4	リスクフェーズ区分の設定と Value-at-Risk 推定	104
3.4.1	擬似母集団分布の特性	105
3.4.2	分布特性に適合したリスクフェーズ区分	108
3.4.3	Value-at-Risk 推定の結果	111
3.5	考察	116
	Appendix D : 仮説検定について	120
	Appendix E : 観測分布と仮定分布との比較	124
第 4 章	保有期間を変化させることによる影響度分析	134
4.1	はじめに	134
4.2	Value-at-Risk 推定の前提	136
4.3	適合度の高い確率分布の選択	137
4.3.1	3STEP-Procedure	138
4.3.2	保有期間 1 日の分布選択	140
4.3.3	保有期間 10 日の分布選択	142

4.3.4	保有期間 20 日の分布選択	144
4.4	結果分析と検証	146
4.4.1	結果の分析	147
4.4.2	バックテストの結果	160
4.5	考察	170
Appendix F : 確率分布について		173
Appendix G : 累積分布関数と Probability Difference について		180
第 5 章 ポートフォリオのリスク評価		189
5.1	はじめに	189
5.2	Value-at-Risk 推定的前提	190
5.3	分布の選択	191
5.3.1	4STEP-procedure	191
5.3.2	保有期間 1 日の分布選択	194
5.3.3	保有期間 5 日の分布選択	197
5.4	結果分析と検証	200
5.4.1	Value-at-Risk 推定結果の分析	200
5.4.2	株式 VaR と為替 VaR の相関の影響	210
5.4.3	バックテストの結果	213
5.4.4	累積分布関数と Probability Difference	223
5.5	考察	230
第 6 章 結論		234
6.1	各章のまとめ	234
6.2	経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を 当てはめる方法のメリット	236
6.3	4STEP-procedure のメリット	237
6.4	応用範囲の拡大	239

6.5	結論と課題	246
	謝辞	249
	引用文献	250
	参考文献	253

図一覧

第1章

図 1-1 Value-at-Risk 概念図	19
図 1-2 ファットテイル (確率密度関数)	26
図 1-3 ファットテイル (累積分布関数)	27

第2章

図 2-1 TOPIX 推移と変化率	35
図 2-2 Value-at-Risk 推定結果	38
図 2-3 Johnson-VaR, Normal-VaR, 3moment-VaR の比較	41
図 2-4 実際の日次収益率分布	46-47
図 2-5 日次収益率の比較 (ヒストグラム)	52-56
図 2-6 Normal-VaR のバックテスト結果	60
図 2-7 Logistic-VaR のバックテスト結果	61
図 2-8 HSecant-VaR のバックテスト結果	62
図 2-9 Laplace-VaR のバックテスト結果	63
図 2-10 Johnson-VaR のバックテスト結果	64
図 C-1 Value-at-Risk 推定結果 (5 確率分布)	76
図 C-2 Value-at-Risk 推定結果 (3moment)	76
図 C-3 Value-at-Risk 推定結果 (ヒストリカル法)	77

第3章

図 3-1 TOPIX 収益率の推移 (2008 年 8 月~2009 年 12 月)	81
図 3-2 左裾の比較 (2008 年 9 月 12 日・10 月 14 日)	87
図 3-3 左裾の比較 (2008 年 10 月 30 日・11 月 18 日)	88
図 3-4 左裾の比較 (2009 年 10 月 5 日・10 月 26 日)	92

図 3-5	左裾の比較 (2009 年 11 月 12 日・12 月 22 日)	93
図 3-6	基準日の確率分布比較 (擬似母集団)	107
図 3-7	Value-at-Risk 推定<<リスクレベル高騰局面>>	113-114
図 3-7	Value-at-Risk 推定<<リスクレベル低下局面>>	115
図 E-1	観測-仮定の分布比較 (2008 年 9 月 12 日)	126
図 E-2	観測-仮定の分布比較 (2008 年 10 月 14 日)	127
図 E-3	観測-仮定の分布比較 (2008 年 10 月 30 日)	128
図 E-4	観測-仮定の分布比較 (2008 年 11 月 18 日)	129
図 E-5	観測-仮定の分布比較 (2009 年 10 月 5 日)	130
図 E-6	観測-仮定の分布比較 (2009 年 10 月 26 日)	131
図 E-7	観測-仮定の分布比較 (2009 年 11 月 12 日)	132
図 E-8	観測-仮定の分布比較 (2009 年 12 月 22 日)	133

第 4 章

図 4-1	Value-at-Risk 推定 (保有期間 : 1 日)	152
図 4-2	Value-at-Risk 推定 (保有期間 : 10 日)	154
図 4-3	Value-at-Risk 推定 (保有期間 : 20 日)	156
図 4-4	保有期間別の変化率	158-159
図 4-5	バックテストの結果 (正規分布)	161
図 4-6	バックテストの結果 (ロジスティック分布)	162
図 4-7	バックテストの結果 (双曲線正割分布)	163
図 4-8	バックテストの結果 (ラプラス分布)	164
図 4-9	バックテストの結果 (ジョンソン分布)	165
図 4-10	バックテストの結果 (Selection)	166
図 G-1	確率密度関数	181
図 G-2	累積分布関数	182
図 G-3	Q-Q プロット	183
図 G-4	Probability Difference	183

図 G-5	2008 年 9 月 10 日 (ロジスティック分布)	185
図 G-6	2008 年 10 月 14 日 (双曲線正割分布)	186
図 G-7	2008 年 11 月 26 日 (ラプラス分布)	187

第 5 章

図 5-1	Value-at-Risk 推定 (保有期間 : 1 日)	204-205
図 5-2	Value-at-Risk 推定 (保有期間 : 5 日)	207-208
図 5-3	保有期間別の変化率	209
図 5-4	セレクションと単純合算の比較 (保有期間 1 日)	211
図 5-5	セレクションと単純合算の比較 (保有期間 5 日)	212
図 5-6	バックテストの結果 (正規分布)	214
図 5-7	バックテストの結果 (ロジスティック分布)	215
図 5-8	バックテストの結果 (双曲線正割分布)	216
図 5-9	バックテストの結果 (ラプラス分布)	217
図 5-10	バックテストの結果 (ジョンソン分布)	218
図 5-11	バックテストの結果 (一般化ロジスティック分布)	219
図 5-12	バックテストの結果 (Selection)	220
図 5-13	2008 年 9 月 10 日 (ロジスティック分布)	224-225
図 5-14	2008 年 10 月 14 日 (ジョンソン SU 分布)	226-227
図 5-15	2008 年 11 月 19 日 (ジョンソン SU 分布)	228-229

第 6 章

図 6-1	TOPIX の確率密度関数	242
図 6-2	TOPIX の Q-Q プロット	242
図 6-3	TOPIX の累積分布関数 (拡大図)	243
図 6-4	TOPIX の Probability Difference (拡大図)	243
図 6-5	TOPIX の P-P プロット	243
図 6-6	FOREX の確率密度関数	244
図 6-7	FOREX の Q-Q プロット	244

図 6-8 FOREX の累積分布関数 (拡大図)	245
図 6-9 FOREX の Probability Difference	245
図 6-10 FOREX の P-P プロット	245

表一覧

第1章

表 1-1	各金融機関の Value-at-Risk 推定の手法	23
-------	----------------------------	----

第2章

表 2-1	Skewness 比率, Kurtosis 比率の分析結果	44-45
	1) リスクレベル下降局面	
	2) リスクレベル高騰局面	
表 2-2	各分布の 99%分位点	48
表 2-3	日次収益率の比較	51
表 2-4	3ゾーン・アプローチ	58
表 2-5	バックテストの結果	65
表 A-1	Gamma の変化	69
表 A-2	Delta の変化	70
表 A-3	Lambda の変化	70
表 A-4	Xi の変化	71
表 B-1	3moment-VaR のシミュレーション	73
表 C-1	Skewness 比率と Kurtosis 比率の分析	79

第3章

表 3-1	ファットテイル性の判定の根拠数値 (2008年9月・10月)	89
表 3-2	ファットテイル性の判定の根拠数値 (2009年11月・12月)	94
表 3-3	正規性の検定	97-98
表 3-4	5分布の表記法	99

表 3-5	適合性の検定 (1 標本コルモゴロフ-スミルノフ検定)	101-102
表 3-6	適合性の検定の結果数値	103
表 3-7	擬似母集団分布の基本統計量と検定結果	106
表 3-8	リスクフェーズ区分別適用分布	110

第 4 章

表 4-1	3STEP-Procedure (保有期間 : 1 日)	140-141
表 4-2	3STEP-Procedure (保有期間 : 10 日)	143
表 4-3	3STEP-Procedure (保有期間 : 20 日)	145
表 4-4	3STEP-Procedure により選定した確率分布 (保有期間 : 1 日)	148
表 4-5	3STEP-Procedure により選定した確率分布 (保有期間 : 10 日)	149
表 4-6	3STEP-Procedure により選定した確率分布 (保有期間 : 20 日)	150
表 4-7	バックテストの結果	167
表 4-8	バックテストの結果 (参考 1)	168
表 4-9	バックテストの結果 (参考 2)	169

第 5 章

表 5-1	4STEP-procedure (保有期間 : 1 日)	196
表 5-2	4STEP-procedure (保有期間 : 5 日)	199
表 5-3	4STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間 : 1 日)	201
表 5-4	4STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間 : 5 日)	202
表 5-5	バックテストの結果	221

序章

1. 問題の所在

Value-at-Risk は、保有する資産・負債の価値が変動することで、将来、損失を被ると予想されるリスク量を、ひとつの金額で表示するリスク計測のスタンダードである。金融機関の市場リスク計測から始まり、信用リスク計測・オペレーショナルリスク計測でも同じように Value-at-Risk の概念を用いてリスク量を計測している。BIS 規制¹における自己資本比率の算定では、リスクアセットとして市場リスク・信用リスク・オペレーショナルリスクの合計が分母となり、自己資本が分子となる。

Value-at-Risk 推定の限界² として取り沙汰される課題は、リスクファクター変動³の分布に正規分布を仮定することから生じるファットテイル性の問題、リスクファクター同士の相関構造の把握の困難性、Value-at-Risk を超える損失の情報がないというテイルリスク⁴の問題である。本研究では3つの課題のうちファットテイル性の問題への対処方法を考察することをメインテーマとしている。とはいえ、ファットテイルは過去に実際に起こった金融データの特性であり、ファットテイルという事象そのものを除去することは不可能である。もちろん観測値における異常値として排除することは、平均値を推定することが目的であれば有効かもしれないが、分布の裾をターゲットにするリスク量の推定では観測値の異常値として排除することは許されないものと判断している。そこでファットテイル性の問題を考慮した推定を考察することに重点を置くこととした。ファットテイルは収益率分布の左裾付近で、頻度は低いが影響度が高いイベントが生じることにより、損失額の推定値が実績値を捉えられないことで過小評価となる可能性があることが問題となる。

我が国で2003年に起きた、いわゆる「VaR ショック」⁵以降、ファットテイル性の問題への対応のため Value-at-Risk 推定の手法を分散共分散法からヒストリカル法に移行する金融機関が増加したと言われている。しかしながら、一部の大手金融機関での話であり、いまだ多くの金融機関が伝統的な分散共分散法を使って Value-at-Risk 推定を行っていることも事実である。分散共分散法では仮定する損失額の確率分布として

正規分布を適用しており，正規分布を仮定することによる計算上の数々のメリットを享受することができる．たとえばそれぞれのリスクファクター間の相関関係を取り込むことができるということが挙げられる．一方，前段で示したように現実の損失率の観測分布は正規分布とはならず，一旦大きなイベントが生じた後は相当の期間，裾が厚いファットテイルな分布が続く可能性が高い．

このファットテイル性の問題に対しては，一般的にヒストリカル法を採用することで対処することが多く，分位点⁶を決定するための原データとして観測分布（経験分布）を利用することによりファットテイル性を回避させることが可能となる．ところが現実には簡単ではなく，計測上のシステム負荷のみならず，経営管理上の観点⁷からも，簡単に Value-at-Risk 推定の手法を変更することは困難であろう．

ヒストリカル法は過去に生じたリスクファクター変動が，将来も同じように繰り返されるということを前提としたノンパラメトリックな手法である．特定な確率分布を仮定することなく，過去の収益率・損失率データからヒストグラムを作成し，その実績のヒストグラムを Value-at-Risk 推定時に用い，順序尺度によりリスク量を推定している．このため，過去に生じたリスクファクター変動以外を考慮することはできず，リスクの予測としては十分とは言えない．また，設定する観測期間の長さによっては古い損失データが抜け落ちるまで大きなリスク量が持続するという傾向がある．つまり，ヒストリカル法といえども完璧な Value-at-Risk 推定手法とは言えない．

2. 研究方法と範囲

本研究の目的は，日々変動する現実の損失率の観測分布に，予測分布を適合させることにある．対象として，単一のリスクファクター及びポートフォリオを評価・分析する．仮定する確率分布を識別する手順として，現実の損失率の観測分布（経験分布）に適合し，かつ，ファットテイル性の問題を考慮した確率分布を決定するプロセスを考察する．この提案するプロセスに沿って確率分布の選定を実行することにより，恣意性を排除する役割を期待するものである．

日々の損失率の観測分布は設定された観測期間・保有期間や適用するリスクファクターにより形状が大きく異なるため、基本分布群⁸（正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布）やジョンソン分布群⁹（SB 分布・SU 分布）がうまく適用できない可能性を含んでいる。歪んだ観測分布への対応策としてワイブル分布・一般化ロジスティック分布・一般化極値分布の3分布まで拡大して、これを拡張分布群¹⁰とした。拡張分布群はいずれもパラメータが3つの確率分布であり、左右に歪んだ損失率の観測分布に対応できることが期待できる。もう一つの課題として、単一のリスクファクターにとどまらず複数のリスクファクターを含んだポートフォリオにおける Value-at-Risk 推定値を算定した上で、評価・分析を実施する必要がある。この課題に対しては第5章 ポートフォリオのリスク評価で扱う。

着眼点として2つの項目を挙げる。第一に現実の損失率の観測分布に近似させること、第二にファットテイル性の問題を考慮すること、以上の2項目をクリアできる手法を検討し、結果として新たな手法の選択肢を創造することを目指す。

本研究は、バンキング勘定¹¹のリスク計測を主体としており、特に伝統的な分散共分散法を採用している銀行に向け、新しい Value-at-Risk 推定手法を提言することを目指している。我が国では「VaR ショック」以降、分散共分散法からヒストリカル法に移行する傾向があると言われている。しかしながら、いまだ分散共分散法を使って Value-at-Risk 推定を行っている金融機関も多い、という実情を鑑み、計算負荷が大きいヒストリカル・シミュレーション¹²への移行の前に、比較的計算負荷が小さくかつ精緻性にも優れた新たな手法を提言したい。

先行研究としては、まず 1990 年代後半にヒストリカル法のバリエーションとして提言された、最も代表的な3手法を挙げる。BRW 法¹³は過去の収益率をそのまま利用し、重み付けは指数関数的に減少させる方法である。HW 法¹⁴は過去の収益率を修正して利用し、重み付けは均等とする方法である。FHS 法¹⁵は過去の収益率を修正して利用（GARCH による推定ボラティリティ）し、重み付けは均等とする方法である。

次に本邦における Value-at-Risk 推定における収益率分布の想定に関する代表的な研究を挙げる。Miura and Oue [2000] では、ロジスティック分布等を用いて Value-at-Risk 推定の適合性を検証しており、ロジスティック分布と正規分布の比較において近似し

ているという結論を示している。安藤[2004]¹⁶においては、分散共分散法（標準的な手法・指数型加重移動平均法）やヒストリカル法（HS法・BRW法・HW法・FHS法）の6種類による手法比較を実施し、BRW法が相対的に好ましい手法であると評価している。久保田 [2009]ではパラメトリックな Value-at-Risk 推定手法として両側指数分布を用いた手法を提案し、正規分布と比較して両側指数分布のパフォーマンスの良さを示している。磯貝 [2014]では切断安定分布をベンチマークとして、正規分布近似、一般化パレート分布近似、ヒストリカル法、カーネル平滑化の各手法と比較分析を実施し、正規分布近似を除く3手法で良好な結果を導き出している。

次に3次・4次のモーメントを反映した VaR 推定に関する研究を取り上げる。Simonato [2011]ではグラム・シャリエ展開、コーニッシュ・フィッシャー展開、ジョンソン分布の3つで比較をし、ジョンソン分布が頑健性と正確性で優れているという結論を導いている。また、小又 [2011]では、グラム・シャリエ展開による歪度及び尖度を反映した分布の適用により正確性が高まると結論づけている。Simonato [2011]と小又 [2011]は、他の分布との比較ではなく歪度・尖度を反映した分布を Value-at-Risk 推定に利用することの有効性を評価している。

最後にジョンソン SU 分布を適用した Value-at-Risk 推定の分析に関する研究を取り上げる。Choi and Nam [2008]では、GARCH モデルを適用した時系列データを用いてジョンソン SU 分布、正規分布と Student t 分布の3分布を Goodness-of-fit や Exceeding ratio test を使用して比較・分析をしている。結果として分布の非対称性を捉えることができるジョンソン SU 分布の適合性が高いことを示した。Simonato [2012]では、N-GARCHモデルを適用した時系列データを用いてジョンソン SU 分布と正規分布の2分布を、パラメータ推定や Q-Q プロットを使って評価・分析し、ジョンソン SU 分布の適切性を評価した。

他にも先行研究は多岐にわたり、Alexander [2008]¹⁷にあるように、たとえばパラメトリックな手法としては漸近展開による2次近似となるデルタ・ガンマ法というように推定の精度を上げる方法や、本研究と同様に非正規分布を仮定する方法(Student t 分布・ロジスティック分布等)や混合分布を仮定する方法、カーネル平滑化を利用した方法、さらに直近の観測データを重視する方法が採られている。

本研究は、先行研究で示したようなロジスティック分布・両側指数分布、さらにはジョンソン SU 分布といった単一の分布の適合性を確認することにとどまらず、多数の非正規分布の適合性を同時に確認する。そのうえ、検証方法も単一の方法に依存することなく、着眼点で示したように、観測分布全体の適合度と左裾の適合度という異なる 2 つの視点から総合的に判断する方法を採用する。

3. 論文の構成

各章の概要をまとめて示しておく。

第 1 章では、我が国の銀行の実情を踏まえると、多くの銀行においてヒストリカル法への移行が進んでいるとはいえども、未だ正規分布を仮定した分散共分散法を採用している銀行が多数を占めている。実際の金融データは正規分布が当てはまらず、裾が厚い分布、いわゆる「ファットテイル」な分布となる可能性が高い。そこで、現状多数の銀行が採用している、正規分布を仮定した伝統的な分散共分散法のメリット・デメリットを分析した上で問題点を整理する。

第 2 章では、主にジョンソン分布に着目しその適用可能性を探る。結果として、ジョンソン分布は計測できない等の問題点が存在するため、分析に役立てる、あるいはベンチマークとする方法に切り替えている。さらに、正規分布との親和性が高い非正規分布間の関係性を考察すると、正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布は比例関係を示すことがわかった。この特性を応用して、リスクレベルの変動に合わせて仮定する確率分布を変更していく概念を提案する。

第 3 章では、日々変動する損失率の観測分布の適合性を計る手段として、ファットテイル判定・正規性の検定・適合性の検定を実施する。また、流動性リスク管理ではポピュラーとなっているリスクフェーズ区分を設定することにより、そのリスクフェーズ区分に合わせて仮定する確率分布を変更していく概念を提案する。

第 4 章では、事前に設定しておく計算手順として“3STEP-procedure”を提案する。STEP1 では適合性の検定により適合度の高い順番に並べる。STEP2 ではファットテイル判定により観測分布に近い確率分布を選定する。STEP3 では、適合度とファットテ

イル性のいずれかを優先して確率分布を選択する。最後に、Value-at-Risk 推定を実施して、その連続性を加味した上で最終的な確率分布を確定する。さらに、保有期間を1日のほかに、10日と20日を追加し、それぞれの Value-at-Risk 推定値を計測して分析・評価する。

第5章では、単一のリスクファクターから拡張し、ポートフォリオの価格変動リスクを捉える。株式の価格変動に為替レートの価格変動を加え、ポートフォリオのリスク量を計算する。また、第4章で提案した“3STEP-procedure”を拡張して新たに“4STEP-procedure”を提案し、推定結果をバックテストにより検証する。

第6章では、研究成果として、ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に1変量パラメトリック分布を当てはめる方法の優位性を論述し、その手順を含めた新たなリスク計測手法として提言する。

各章を構成する原論文は以下のとおりである。

第2章 収益率分布における非正規分布への対応

吉田洋一[2012], 「Value at Risk 推定における非正規分布の応用可能性—東日本大震災前後の株式リスク分析—」, CUC Policy Studies Review, 31/32, pp.79-100.

第3章 収益率の観測分布の適合度

吉田洋一[2013], 「分布の適合度分析と Value-at-Risk 推定への応用—市場リスク計測におけるリスクフェーズ区分の設定—」, 日本金融・証券計量・工学学会, 2012 冬季大会予稿集, pp.191-202.

第4章 保有期間を変化させることによる影響度分析

吉田洋一[2013], 「条件付き Value-at-Risk 推定のフィージビリティ分析—保有期間の変化における株式リスクへの影響—」, CUC Policy Studies Review, 35, pp.11-26.

-
- ¹ BIS 基準は国際業務を行う銀行の自己資本比率に関する国際統一基準をいう。バーゼル I は、国際的な銀行システムの健全性の強化と、国際業務に携わる銀行間の競争上の不平等の軽減を目的として策定され、1988 年 7 月にバーゼル銀行監督委員会により公表された。バーゼル II は、(1) 最低所要自己資本比率規制（リスク計測の精緻化）、(2) 銀行自身による経営上必要な自己資本額の検討と当局によるその妥当性の検証、(3) 情報開示の充実を通じた市場規律の実効性向上、を 3 つの柱として策定され、2004 年 6 月に公表された。バーゼル III は、金融危機の再発を防ぎ、国際金融システムのリスク耐性を高める観点から、国際的な金融規制の見直しに向けた検討が行われた結果、合意が成立し、2009 年 1 月に公表された。
- ² 日本銀行金融機構局[2011]では、本章で取り挙げた 3 つの限界の他に、将来のリスクファクター変動が過去の変動と同じとは限らないこと（「定常性の仮定」の問題）を取り上げている。本章においては、上記文献の中で、ストレス・テストが有効な対策であるという結論を考慮して、「定常性の仮定」の問題を Value-at-Risk 推定の限界に含めていない。
- ³ リスクファクター変動とは価値変動の要因となるものである。市場リスクでは金利・株式価格・為替レートを指す。たとえば金利であれば、翌日には返済する取引である Over Night（翌日）から 1 週間、1 ヶ月、3 ヶ月、6 ヶ月、1 年、2 年、・・・10 年、・・・、と数多くのリスクファクターを設定している。
- ⁴ テイルリスクはマーケットにおいて、確率は低いが発生すると非常に巨大な損失をもたらすリスクのことをいう。これは確率分布の端にあり、数 10 年～数 100 年に一度起こるかどうかというリスクであるため、債務格付などでは対象外とされることがある。その一方で、一度起きるとマーケットに劇的なダメージを与えることになる。
- ⁵ VaR ショックは、2003 年に日本で起きた、歴史的な債券暴落のことをいう。長期金利が史上最低の 0.430% まで下げた後、急激に 2% 近くまで上昇した。一部の銀行の売りが金利上昇を招き、さらに他の銀行が売るという負の連鎖が発生し、債券の暴落を招いた。当時大手行は、量的緩和政策の下で短期ゾーンの国債投資の収益性が低下する中、中長期ゾーンの国債投資にシフトし、保有債券のデュレーションを延ばしていた。
- ⁶ 観測データを小さいものから順番に並べ、小さい方から $100\alpha\%$ の位置にある値を「 100α パーセンタイル」または「百分位点」という。本研究では「分位点」を使用し、具体

的には信頼水準 99%を採用しているため 99%分位点を多用している。

- ⁷ Value-at-Risk は自己資本管理のための基礎数値として使用されることがあり、Value-at-Risk 推定の前提を変更すれば計算結果も変わってしまう可能性がある。
- ⁸ 基本分布群は平均と標準偏差の 2 つがパラメータとなる確率分布である。
- ⁹ ジョンソン分布群は平均・標準偏差・歪度・尖度の 4 つがパラメータとなる確率分布である。
- ¹⁰ 拡張分布群はパラメータが 3 つとなる確率分布である。拡張分布群の選定に当たっては、実データを使用して 49 個の連続型分布 (Beta, Johnson SB, Kumaraswamy, Pert, Power Function, Reciprocal, Triangular, Uniform, Cauchy, Error, Error Function, Gumbel Max, Gumbel Min, Hyperbolic Secant, Johnson SU, Laplace (Double exponential), Logistic, Normal, Student's t, Burr, Chi-Squared, Dagum, Erlang, Exponential, F Distribution, Fatigue Life (Birnbau-Saunders), Frechet, Gamma, Generalized Gamma, Inverse Gaussian, Levy, Log-Gamma, Log-Logistic, Lognormal, Nakagami, Pareto (First Kind), Pareto (Second Kind), Pearson Type 5, Pearson Type 6, Rayleigh, Rice, Weibull, Generalized Extreme Value, Generalized Logistic, Generalized Pareto, Log-Pearson 3, Phased Bi-Exponential, Phased Bi-Weibull, Wakeby) より、当てはまりの良い確率分布を事前に選定している。パラメータ数が多い確率分布も候補に挙げたが、視覚的に当てはまりがあまり良くないもの、検定ができないものもあり、結果としてパラメータは 3 つまでという条件を付している。たとえば、パラメータが 2 つであるガンベル分布も候補になったが、歪みの変化に対応することができないため、ごく一部の期間だけが当てはまりが良いものとなり対象から除外している。また、Student t 分布については与えたデータ (251 個の観測データ) だけではうまくフィットできなかったため対象から除外している。
- ¹¹ バンキング勘定 (銀行勘定とも言う) とは、銀行が預金を受入れ、それを融資等で運用するための勘定を指し、銀行の本業のための勘定のことである。一方、トレーディング勘定とは、市場取引を短期的に繰り返して利益を追求するトレーディング取引の勘定を指す。銀行では、バンキング勘定とトレーディング勘定は区分して管理されている。
- ¹² 大手行で採用しているヒストリカル法は一般的に「ヒストリカル・シミュレーション法」を指している。しかも、簡易なマッピング・アプローチ (キャッシュフローをグリッド・ポイントに集約する方法) ではなく高度なフルバリュエーション・アプローチであり、

システム負荷が高く、かつ費用も高い。これが導入障壁となっている。

¹³ Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998] を参照。

¹⁴ Hull and White [1998] を参照。

¹⁵ Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999] を参照。

¹⁶ 安藤 [2004] を参照。注 12～14 の文献の手法を比較分析している。

¹⁷ Alexander [2008] の pp.103-126 を参照。

第 1 章 Value-at-Risk 推定とファットテイル問題

まず、リスクの定義¹を考えていく。一般論としてのリスクとは、「資産や収益を減少させる恐れのあるもの」となる。特徴的なことは、符号がマイナスとなる損失だけに注目している点である。つまり、一方的に資産や収益の減少部分だけを取り上げているということである。これを「損失リスク」と呼んでいる。これに対し金融理論、特に投資におけるリスクとは、予期しない結果をもたらす変動と定義されており、プラスもマイナスも含めて価値変動自体がリスクであると言っている。数学的には、リスクは標準偏差であるとも言われることがある。リスクをさらに簡単な言葉で表すと「ばらつき」という言葉が当てはまる。変動に関する不確実性を「損益のばらつきのリスク」と呼ぶ。

リスク管理の観点からリスクを定義すると、上で説明した「損失リスク」と「損益のばらつきのリスク」の両方が含まれることになる。本研究で扱うのは市場リスクであり、収益額の度数分布²では平均を中心にプラス方向が収益、マイナス方向が損失となり、プラスマイナスの両方が存在することが特徴となる。

この市場リスクを計測する方法として最も一般的なものが、Value-at-Risk であり、トレーディングにおける保有資産のリスク把握から生まれ、現在では欠くことのできない手法となっている。本章では、はじめに Value-at-Risk の概要・前提・役割について概観していく。そのあとに Value-at-Risk 推定において大きな課題となる、ファットテイル性の問題について概略を述べる。

1.1 Value-at-Risk の概要

Value-at-Risk は、米国の投資銀行である J.P.モルガン CEO Weatherstone の指示により、1980 年代終わりに “RiskMetricsTM”³ というリスク計測手法として確立された。世に知れ渡ったのは、1994 年にソフトウェアとして無償で提供されたことによる。さらに、1996 年にバーゼル銀行監督委員会が公表したマーケットリスク規制の追加の中で市場リスク計測の方法として認知され、Value-at-Risk の採用が推奨されたことによるものである。確立されてからすでに 20 数余年が経過しており、現状ではリスク計測の定番となっている。

Value-at-Risk 推定には、代表的な手法が 3 つある。第一は分散共分散法であり、分散共分散行列を使って相関の影響を反映した手法である。第二はヒストリカル法と呼ばれるノンパラメトリックな手法⁴であり、その代表的な手法としてリスクファクター変動に過去データを使ってシミュレーションする「ヒストリカル・シミュレーション」がある。第三は乱数を用いたモンテカルロ法⁵であり、通常「モンテカルロ・シミュレーション」と呼ばれている。モンテカルロ・シミュレーションには常にシステム負荷という大きな問題が付いて回ることもあり、モンテカルロ・シミュレーションを Value-at-Risk 推定の主な手法としているケースはほとんど聞かれない。とはいえ何らかの形で 3 つの手法のうち、複数の手法を採用しているものと考えられている。

以下に、各手法の概要を述べる。

[1] 分散共分散法

「分散共分散法」 “Variance-Covariance Method” は、Value-at-Risk 推定の基礎的な手法となっている。90 年代後半に広く投資銀行やヘッジファンド等に利用されるようになり、我が国でも大手銀行を中心に採用された。金利変化に対する価値変動を捉えたリスク量を各グリッドに分解したグリッド・ポイント・センシティブティ (Grid Point Sensitivity) と、ボラティリティである分散共分散行列 (Variance-Covariance Matrix) を掛け合わせることで数値解析的に算出する。分散共分散法は損

失率変動そのものに注目しており、リスクファクター間の変動を相関行列で表現することが特徴であり、それぞれのリスクファクター間の相関を考慮することができる。具体的には累積分布関数の逆関数により数値解析的に Value-at-Risk を算定する手法であり、理論的背景も確立されている。

[2] ヒストリカル法

最もシンプルな手法である「ヒストリカル・シミュレーション法」 “Historical Simulation Method” がある。ヒストリカル法は計測基準日に保有しているポートフォリオを過去にずっと持っていたものと仮定した上で、実際のリスクファクター変動を適用し損益計算して分位点を推定するプロセス（標本分位点法⁶）により Value-at-Risk を算定する。順序尺度によるノンパラメトリック手法であり、過去データを利用したシンプルな概念のため説得力がある。我が国では 2003 年 6 月に起きた VaR ショックを契機として分散共分散法の代替としてヒストリカル・シミュレーション法が採用されることが多くなった。

また、サンプリング手法として復元抽出を用いて推計誤差を除去するブートストラップ法⁷があり、データ数が少ないときの補完的な手法として有意義である。ブートストラップ法は原データの偏りを除去することが目的であり、上で示した一般的なヒストリカル・シミュレーション法より安定した Value-at-Risk 推定ができる方法として広く知られている。

[3] モンテカルロ法

乱数を発生させてシミュレートする「モンテカルロ・シミュレーション法」 “Monte-Carlo Simulation Method” があり、ヒストリカル・シミュレーション法同様、損益計算した上で分位点を推定するプロセスにより Value-at-Risk を算定する。モンテカルロ・シミュレーション法にはシステム負荷という大きな課題が常に存在し、進んでいないというのが実情である。また、モンテカルロ・シミュレーション法は線形リスクのみならず非線形リスクにも対応しており、オプション性商品のリスク評価も可能である。

ここで、Value-at-Riskの数学的定義を分布関数で表現すると、

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha,h} &:= \inf \{l \in \mathbb{R} \mid P(L_h > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf \{l \in \mathbb{R} \mid F_{L_h}(l) \geq \alpha\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

L_h : 確率変数 損失 (Loss の頭文字) (保有期間 : h)

l : 確率変数 L_h の実現値

α : 信頼水準

h : 保有期間

$F_{L_h}(l) = P(L_h \leq l)$: ポートフォリオの損失分布関数

\mathbb{R} : 実数集合

となる。

次に、簡潔な Value-at-Risk の定義を引用する⁸。

VaR は、市場リスクの計測手段である。それは保有期間⁹ h 日にわたり、信頼水準¹⁰ α で発生する可能性がある最大損失額である。

さらに、Value-at-Risk の特色を引用する¹¹。

VaR の特徴をまとめると以下のようなになる。

[1] VaR は水準 α に依存する

水準 α を高めに設定すれば保守的なリスク測度となる

[2] VaR は保有期間により変わる

保有期間が長くなると、分布が広がるので VaR も大きくなる

[3] VaR は評価に利用するデータの期間に依存する

[4] VaR を推定するには、なんらかの確率モデルが必要である

[5] 分布の推定が前提となる

設定したモデルにより、ポートフォリオの価値の変動や、金利の変動などの分布を推定する (正規分布が前提であるのではない)

[6] ポートフォリオの構成に依存

VaR は資産の種類に依存しない定義であるので、さまざまな種類の資産を含むポートフォリオにも適用可能な概念であり、異なる種類の資産間のリスクの大小比較も可能となる

「VaR は水準 α に依存する」については、バーゼル銀行監督委員会におけるトレーディング勘定の市場リスク規制が意識されており、信頼水準 99%が使われるケースが圧倒的に多い。ごくまれに信頼水準 99.9%が使われることがあるが、信頼水準 99%よりさらに保守的な信頼水準を設定していることになる。ここで言う水準 α は信頼水準と同義である。

「VaR は保有期間により変わる」については、各金融機関により区々として一定でない。具体的な保有期間として、1日・10日(2週間)・20日(1か月)・60日(3か月)・120日(6か月)・240日(1年)が見受けられる。トレーディング勘定の Value-at-Risk 推定では保有期間 1日¹²が圧倒的に多いが、バンキング勘定の Value-at-Risk 推定では上に示したように様々であるのが実情である。逆に言えば、各銀行の特徴が示されているものと判断でき、各銀行の保有するリスクに対する考え方が見てとれる。

「VaR は評価に利用するデータの期間に依存する」については、観測期間をあまりにも長く設定すると遠い過去のデータの影響を受けることとなり、現時点のリスク量を推定するという意味では信憑性が劣る懸念がある。たとえば長い観測期間を設定するとその推定値は安定する傾向があり、逆に短い観測期間を設定すればその推定値は不安定になる傾向がある。つまり、安定的な Value-at-Risk 推定を望むか、あるいはリスクファクターの感応度を知りたいか、いずれかを優先するかというトレードオフの関係となり、観測期間の設定により銀行のリスクに対するスタンスが読み取れる。

「分布の推定が前提となる」については、正規分布を仮定すれば多くの利点を享受できるが、そもそも現実の観測分布が正規分布に従うという前提そのものが危うくなっている。つまり現実の観測分布はファットテイルな分布となる可能性が高く、

リスクファクター変動が大きく動くときにこの傾向は強くなり、さらに一旦上昇すると長い期間高止まりする傾向がある。これは観測期間の長さに依存するので、長い観測期間を設定する場合には大きな変動データが抜けるまでその影響が残ることを認識しておかなければならない。

「ポートフォリオの構成に依存」では異なる種類の資産間のリスクの大小比較も可能となることに異論はないが、各リスクの合算については多くの困難な課題が残っていることを承知しておかなければならない。1つの方法として各リスクを単純合算する方法もあろう。最近ではコンピュータ¹³を使って各リスクの相関を考慮する方法もある。

ここで、各手法のメリット・デメリットを整理しておく。

まず、デルタ法（分散共分散法）のメリットは、概念がわかりやすく解析的に算出できる、かつ、理論的背景が確立している点が挙げられる。わかりやすいのは計算がシンプルであり、また計算量が少ないことを指している。ただし、正規分布を仮定すること、グリッド・ポイントへのマッピング¹⁴という単純化プロセスが含まれており、特に正規分布を仮定することで推定結果は過小評価をしている可能性があると言われている。一方、デルタ法のデメリットは非線形リスクに対応できず、オプション性商品の評価は不正確とならざるをえないことが挙げられる。もちろん正規分布を仮定することによる、過小評価の問題は大きなデメリットとなっている。

次に、ヒストリカル法のメリットは経験分布を利用するため、概念はシンプルであることが挙げられる。また過去実績をそのまま用いるノンパラメトリック手法であるため、ファットテイルな分布や非線形リスクにも対応できる。計算負荷については、フルバリュエーション・アプローチ¹⁵では負荷は大きくなるが、分散共分散法で取り上げたマッピング・アプローチであれば計算負荷は比較的小さい。一方、ヒストリカル法のデメリットは、過去データへの依存が強いことが挙げられる。つまり、推定値が過去に起きた損失額を超えることはなく、リスクの予測としては十分とは言えない。また、安定しているときにはリスクファクター変動に対する感応度

が低く、変動期には急激な変動が発生する。特にリスクレベルが高いときには高止まりする嫌いがある。たとえヒストリカル・シミュレーション法を採用したとしても多少の金額のブレは生じるだろうが、レベルは大きく変わらずリスクレベル増大局面において変動のタイミングの遅れが発生する可能性がある。これは計測に設定する観測期間の長さが大きいほどこの傾向が強くなり、観測期間の長さに依存するだろう。単純にその対応として観測期間を短くしたとしても、そのときには推定結果のブレが大きくなる原因となるだけとなる。

最後に、モンテカルロ法のメリットとして第一に様々な商品に対応できることが挙げられる。分位点を決定するプロセスはヒストリカル法と同じであるため、データ数においてヒストリカル法より断然多くなる。仮定する確率分布の当てはまりが良いという条件付きではあるが、この点ではモンテカルロ法の方が優位となり、正確な Value-at-Risk 推定が可能となる。ただし、モンテカルロ法には計算負荷の課題が大きいのしかかり、この点が最大のデメリットとなっている。計算負荷の課題についてはコンピュータ技術の発展が関わっており、最近では GPU(Graphics Processing Unit)技術の進展により、モンテカルロ法の弱点から外れる可能性が高くなってきている。現状ではデリバティブ商品だけを切り離してリスク計測する形で使われているケースがある。

1.2 Value-at-Risk の前提

本研究ではヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法¹⁶を扱う。ポートフォリオのリスク計測であれば、損益ベースの段階で特定の確率分布を当てはめる静的分布モデルであり、適合度の高い確率分布が存在すれば推計値の精度は高くなる。

シンプルなヒストリカル法やヒストリカル・シミュレーション法でもなく、経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を採用する最も大きな理

由は、観測データ数¹⁷の問題である。観測データ数は設定する保有期間に大きく左右され、たとえば Box-Car 法¹⁸を想定して保有期間 10 日と設定した場合、200 個程度の観測データを取得するには 2000 日（8 年相当）の原データが必要となる。同様に、保有期間 5 日と設定した場合、200 個程度の観測データを取得するには 1000 日（4 年相当）の原データが必要となる。直近のリスクファクター変動を重視するという観点から、最長で 8 年前の原データを使ってリスク計測するより、最長で 4 年前の原データを使って現時点における将来のリスク量を計測する方が望ましいと考えられる。現時点において近い将来のリスク量を予測するという意味では、できるだけ現時点に近い過去データを使う方が説得力はあることを指している。

本研究では Box-Car 法ではなく Moving-Window 法¹⁹により変化率を算出しているため、観測期間数の問題は直接的には生じていない。しかしながら後段で取り上げるが、Moving-Window 法を採用する際には原データの取扱いには十分注意が必要である。保有期間を長くすると、その保有期間の長さに対応したトレンドが形成される可能性があり、さらにプラス（収益）・マイナス（損失）のどちらかに偏る可能性も高いため、原データの動向を常にウォッチする必要がある。なお、GARCH 等でフィルタリングした時系列に対して、Value-at-Risk 推定を行うという条件付きアプローチは採用していない。

結果として得られる Value-at-Risk 推定値は、全章においてパーセント表記している。金額ベースのリスク量は、パーセント表記している Value-at-Risk 推定値に基準日時点の現在価値をかけることで簡単に計算することができる。

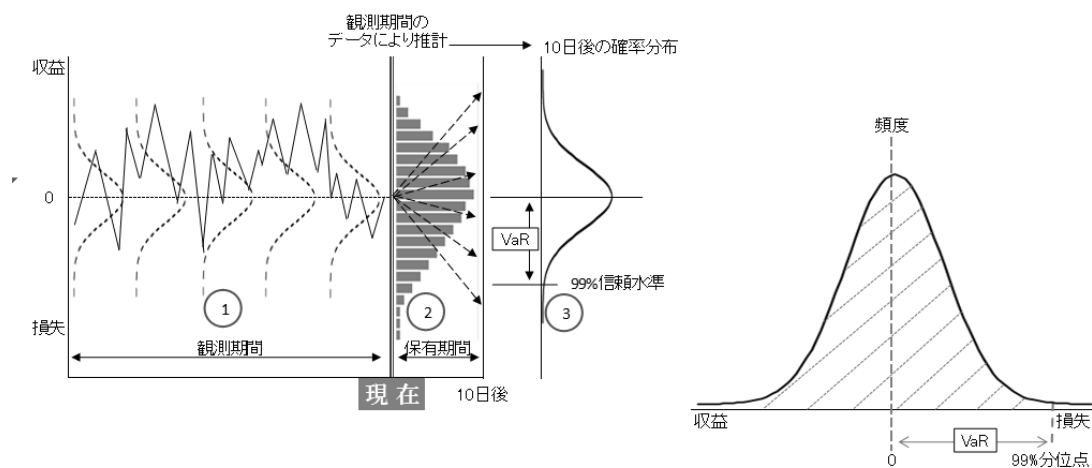
図 1-1 Value-at-Risk 概念図では、①は観測期間における日々のポートフォリオ価値が変動している観測データの推移を示しており、これらの観測データをヒストグラム（観測分布）に変換することで現時点の観測分布を②の分布形で表現している。この観測分布をそのまま使って、順序統計の考え方に従って 99%分位点を決定する方法がシンプルなヒストリカル法と呼ばれる、最もオーソドックスな手法である。つまり、シンプルなヒストリカル法では②の分布形（観測分布）を基礎として重要視することになる。

次にヒストリカル・シミュレーションでは、計測基準日の損益計算を基準としてリスクファクターのシミュレーションにより、③の分布形（予測分布）を算出する。その後、シミュレーション結果の分布を当てはめることにより分位点を決定する。すなわち、ヒストリカル・シミュレーションでは③の分布形（予測分布）が直接的な基礎となり、これを重要視することになる。

一方、現在時点より保有期間後（10 日後）の将来の損失率分布を予測するのに、ある特定の確率分布を当てはめるのが、経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法であり、②の現在時点の分布形（観測分布）を確認したあと、特定の確率分布を仮定して③で示す分布形（予測分布）を算定するプロセスとなる。つまり、経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法では②に基づく③の分布形を基礎としており、②と③の両方の分布形を重要視することになる。

特定の分布を当てはめるところがヒストリカル法では独特となり、シンプルなヒストリカル法やヒストリカル・シミュレーションとの大きな違いであるが、日々の観測分布が基礎となるという意味では三者ともに同じ考え方に基づくため、大括りでヒストリカル法に分類されている。

図 1-1 Value-at-Risk 概念図



(出所) 「金融工学とリスクマネジメント高度化」研究会 (FFR+)

リスク計量化：VaR の理解と検証，統計・確率の基礎²⁰，p.9.

※ 経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を説明するため，筆者が加筆したもの。

本研究では，起こりうる最大損失率を Value-at-Risk と定義する．すなわち，99%分位点が Value-at-Risk 推定値となる．

Value-at-Risk 推定では、計測の前提となる保有期間と信頼水準がある。保有期間は保有する資産及び負債のリスク量を推定する期間を示しており、本研究では保有期間を1日・5日・10日・20日とし、保有期間5日・10日・20日の場合のデータの取り方は重複を許す Moving-Window 法に依っている。また、信頼水準は一般的に使用されることが多い、99%を採用した。

次にリスクファクターの前提を決定しておく。本研究ではリスクファクターを株式指数と為替レートとし、TOPIX 及び円／ドル TTM を使用する。観測期間として取得した収益率データ及び損失率データは、第2章では2010年10月1日より2011年9月30日まで、第3, 4, 5章では2008年9月1日より2008年11月30日までとした。株式指数については Yahoo ファイナンスより取得した TOPIX を使用して算出し、為替レートについては三菱 UFJ リサーチ&コンサルティング株式会社が公表している為替レート（円／ドル TTM）を使用して算出している。

株式指数と為替レートは両方とも価格変動リスクであり、リスクファクター変動は変動率とし、 $[\text{当日終値} / \text{前日終値}]$ の \log をとり、対数収益率あるいは対数損失率とする。一方、金利については金利変動リスクとなり、実務では低金利になっている状況を踏まえ、変動率ではなく変動幅 $[\text{当日終値} - \text{前日終値}]$ をリスクファクター変動とするケースが多い。

ここで Value-at-Risk 推定に関するデータの取扱い等について整理しておく。

本研究では既述しているように Moving-Window 法を採用しているが、評価の対象となる観測分布（観測データ）には手を加えていない。ところがヒストリカル法を採用するにあたり注意を要する事項がある。それはリスクファクターの収益率（損失率）は i.i.d.²¹ が仮定されていることである。

Moving-Window 法によって得られた観測データは統計学的には自己相関・系列相関がある可能性が高く、そのままでは推定されたリスク量に問題が残る。つまり独立性を担保できないことを示している。とはいえ、Box-Car 法ではデータ数を確保することができない上、もしできたとしてもあまりにも古い観測データを使って近い将来のリスク量を推定したとしても推計結果の説得力は弱いものになってしまう。

本研究では理論上の問題点は残すものの、観測データをそのまま使用することとしている。この問題点に対する実務的な対応としては、GARCH²²モデル等の採用、あるいはBox-Car法により取得した観測データをブートストラップ法によりデータを増やす方法が考えられる。特に後者により保有期間のスケールアップを考えた場合、観測データ数の確保とデータの鮮度のトレードオフを考慮すると、5~10日程度の保有期間が妥当と考えられる。本研究ではこうした背景から第5章における保有期間のスケールアップで保有期間5日としている。

観測データ数は、保有期間1日では信頼水準99%での観測データ数の確保とデータの鮮度を考慮すると、1年相当(250個)が妥当と考えられる。これはトレーディング勘定の市場リスク規制におけるバックテストにおいて、250個の観測データから保有期間1日のValue-at-Risk推定値のバックテストを実施することが求められていることとも整合的になる。上記と同程度の観測データ数が必要と考えると、たとえば保有期間5日であれば観測データ数は5年相当の原データが必要となる。同様に、保有期間10日であれば観測データ数は10年相当の原データが必要となる。Box-Car法により取得した観測データをブートストラップ法によりデータを増やすことを考慮しても、その原データの数は少なくとも200個から250個程度は必要である。

観測期間については、第2章では観測期間500日(2年相当)を採用し、第3~5章では観測期間251日(1年相当)を採用している。

1.3 Value-at-Risk の役割

従来のリスク指標に比べ、ポートフォリオ全体のリスク量を1つの指標として集約できること、リスク量が損失額という金額で表示されるためポートフォリオの期待収益や自己資本との比較によって、銀行が負っているリスク量の妥当性を容易に判断できること、この2つが Value-at-Risk の最大のメリットである。つまり、Value-at-Risk は第一に基本的なリスク指標として使われ、第二に資本配賦に使われている。リスク指標では限度枠（リスク枠、ポジション枠、損失限度枠等）の規準やロスカット・ルール of 規準として使われおり、一方、資本配賦では自己資本に対するリスクカテゴリーごとの規準として利用されている。なお、資本配賦はリスクテイクの水準を経営体力の範囲内に抑えることにより健全性を確保しようとするマネジメントである。

表 1.1 は各銀行・信用金庫がどのような手法を採用し、具体的にパラメータをどの程度に設定しているかを、各銀行が自ら公表しているディスクロージャー誌に掲載されているものを集めた一覧表となっている。メガバンクについては全3行、主要行等に含まれるあおぞら銀行、上位地方銀行から千葉銀行・中国銀行、中位地方銀行からスルガ銀行、第二地方銀行から東日本銀行、信用金庫から城南信用金庫・埼玉縣信用金庫・旭川信用金庫、8銀行・3信用金庫を抽出して示した。なお、表 1.1 に示している項目はバンキング勘定のリスク計測について記載している。

表 1-1 各金融機関の Value-at-Risk 推定の手法

25年3月期ディスクロージャー		保有期間 (日)	信頼水準 (%)	観測期間 (日)	備考
銀行名	手法				
三菱東京UFJ銀行	・ヒストリカル シミュレーション	10	99%	701	株式リスク量には、政策投資株式は含まない。
三井住友銀行	・ヒストリカル シミュレーション	1	99%	4年	
みずほ銀行	・分散共分散法 ・モンテカルロ シミュレーション	1か月	99%	1年 (265営業日)	線形リスク…分散共分散法 非線形リスク…モンテカルロ・シミュレーション バンキング業務には、政策保有株式は含まない。
あおぞら銀行	・分散共分散法 ・デルタプラス法 ・内部モデル	1	99%	2年	線形リスク…分散共分散法 非線形リスク…デルタプラス法 ファンド等…内部モデル
千葉銀行	・分散共分散法	1年	99.9%	1年	市場性資金取引などの一部の取引においては、 保有期間10日のVaRを採用している。
中国銀行	・分散共分散法	125 62	99.9% 99.9%	5年 5年	銀行勘定全体 市場リスク限度
スルガ銀行	・分散共分散法	60 1年	99% 99%	1年 5年	有価証券(政策投資株式は120日) 預貸金利
東日本銀行	・分散共分散法	6か月	99%	5年	
城南信用金庫	・ヒストリカル シミュレーション	240	99%	5年	
埼玉縣信用金庫	・分散共分散法	6か月	99%	5年	月次(前月末基準) 有価証券は日次(前営業日基準)
旭川信用金庫	・分散共分散法	1年	99%	1年	

(出所) 各銀行・信用金庫の2013年3月期ディスクロージャー誌

表 1.1 を見ると、3 メガバンク中 2 行と城南信用金庫の 1 金庫、計 2 銀行・1 信用金庫がヒストリカル・シミュレーションを採用している。残りのみずほ銀行・あおぞら銀行と千葉銀行・中国銀行・スルガ銀行・東日本銀行・埼玉縣信用金庫・旭川信用金庫、計 6 銀行・2 信用金庫が分散共分散法を採用している。ただし、みずほ銀行については、一部の商品でモンテカルロ・シミュレーションを採用している。手法については、規模の大きい銀行ではヒストリカル・シミュレーションを採用しており、規模の小さい銀行では分散共分散法を採用している傾向が見てとれる。

次に、保有期間を比較してみると区々となり、大手行は比較的短い保有期間を設定している傾向があり、地銀以下では 3 か月、6 か月、1 年というように比較的長い保有期間を設定している。信頼水準については、中国銀行・千葉銀行だけが信頼水準 99.9%を採用しているが、他はすべて信頼水準 99%を設定している。観測期間については、保有期間同様、大手行は 5 年未満で比較的短い観測期間を設定している傾向があり、地方銀行以下では 5 年が多いことがわかる。

なお、スルガ銀行と中国銀行に関しては有価証券のリスク量と他のリスク量を区分し、保有期間を変えてリスク量を計測していることを明示しているため、2 段で表記している。

表 1.1 の情報源は各銀行・信用金庫のホームページに掲載している直近（平成 25 年 3 月期）のディスクロージャー誌であり、ディスクロージャー誌に明示している事項を表記している。

1.4 収益率分布におけるファットテイル問題

ファットテイルとは、平均から極端に離れた事象の発生する確率が正規分布から予想される確率よりも高い現象をいう。序章で取り上げた「国際金融危機の教訓を踏まえたリスク把握のあり方²³」において、リスクファクター変動の推計や価値変動の評価での技術的限界の1つとしてファットテイル性の問題が示されている。結果としてリスクを過小評価する可能性があることが問題となっている。

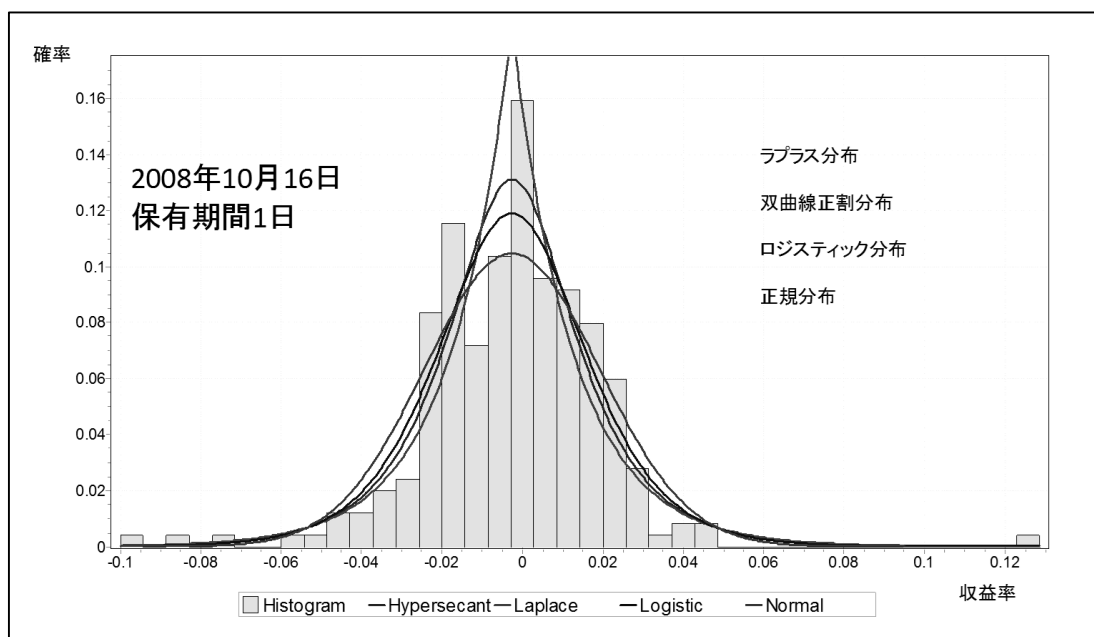
本研究ではファットテイルを拡大解釈して、「正規分布」だけにとどまらず「仮定した非正規分布」まで広げている。すなわち、非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定の場合でも、観測分布から予測される Value-at-Risk 推定値を捉えていない事象をファットテイル性の問題としている。

1.4.1 ファットテイルの視覚化

実際の観測データの密度関数・累積分布関数の図で確認する。ここでは累積分布関数において小さい方から順次累積することから、収益率をもとにした観測分布・確率分布を考える。すなわち、横軸には収益率を設定している。

図 1-2 ファットテイル（確率密度関数）

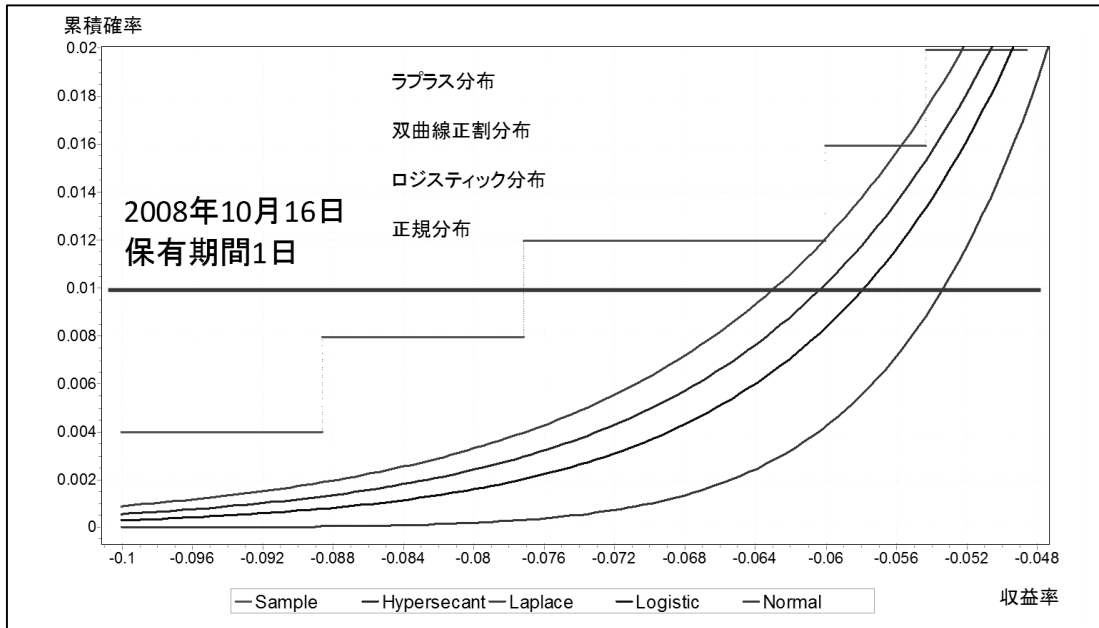
正規分布と対比して分布の裾が厚いこと



(出所) 筆者作成

確率密度関数の図では中央の平均付近で高い順番に、ラプラス分布、双曲線正割分布、ロジスティック分布、そして一番下に位置するのが正規分布となっている。観測分布（ヒストグラム：度数分布）は正規分布のみならず、すべての確率分布より裾が厚くなっていることが視覚的にわかる。この状態がファットテイル（裾が厚い）と呼ばれている。

図 1-3 ファットテイル（累積分布関数）



(出所) 筆者作成

累積分布関数の図では階段状の横の直線（縦は点線）が観測分布であり、0.01（1%）上の直線と交差するときの値（横軸：収益率）が99%分位点となり、ここでは観測分布の99%分位点は0.077（7.7%）となる。一方、各累積分布関数は上から、ラプラス分布、双曲線正割分布、ロジスティック分布、正規分布となっている。正規分布の累積分布関数が0.01（1%）上の直線と交差するときの値は0.053（5.3%）であり、正規分布を仮定した場合の99%分位点となり観測分布の99%分位点より小さい。同様に4分布のうち一番上位にあるラプラス分布でさえ、99%分位点は0.063（6.3%）であり、観測データ（7.7%）より小さくなっている。

観測分布の99%分位点が仮定する分布の99%分位点より大きくなる状態がファットテイルである。つまり予想値が現実の観測値を捉えることができず、その結果として予想が過小評価となるという事象が起きている。

なお、図 1-3 ファットテイルを説明するため99%分位点の数値が図中ではマイナス表記となっているが、文中ではプラス表記して説明している。

1.4.2 ファットテイルへの対応

ファットテイルは現実の観測データの特徴であり、データそのものを変更あるいは削除することは望ましくない。この現実の観測分布がファットテイルになるといふ事象に対処できる方法としてヒストリカル法が知られている。しかし、ヒストリカル法は現実の観測分布をそのまま推定に利用することから、推定値が観測値を超えることがないため、リスク予測としては十分とはいえない。データ数を多くすることができるモンテカルロ法の方が、条件付き²⁴ではあるがヒストリカル法より正確な推定値が得られるという意味で優れている。しかしながら、本研究ではモンテカルロ法を直接的に対象とはしておらず、分散共分散法の欠点を解消する方法として、また、注 16 で示したようにデータ数が少ないときに有効とされる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を採用している。データ数についても、本研究ではデータの鮮度を重視するため 251 個（1 年相当）としており、上記の「データ数が少ないとき」に該当するため、損失率分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を採用することは有効である。

現実の観測分布のファットテイル性が Value-at-Risk 推定において大きな問題である。ただし、常に問題になると断定することは誤解を招く可能性がある。正規分布に近い観測分布となる時期も多く存在するからである。本研究で扱う観測データは、2008 年に起きたリーマン・ショックの前後の観測データが中心となるため、ファットテイル性の問題が起きやすくなる。リーマン・ショック以前の観測データやリーマン・ショック以後の観測データでは、時期によってはファットテイル性が問題とならない場合があるかもしれない。

我が国では 2012 年 3 月より適用となった、いわゆる「バーゼル 2.5」（2009 年 7 月公表、2011 年末より実施）²⁵における項目の 1 つである「トレーディング勘定の取扱い強化」の「ストレス VaR に係る追加資本賦課」がある。このストレス VaR を算出するための原データとして、リーマン・ショック前後の観測データが有効であろう。

-
- ¹ 日本工業規格 JIS Q 31000 (ISO 31000:2009) 「リスクマネジメントー原則及び指針」では、リスクは「目的に対する不確かさの影響」と定義されている。
- ・影響とは、期待されていることから、好ましい方向及び／又は好ましくない方向にかい離することをいう。
 - ・目的は、たとえば、財務、安全衛生、環境に関する到達目標など、異なった側面があり、戦略、組織全体、プロジェクト、製品、プロセスなど、異なったレベルで設定されることがある。
 - ・リスクは、起こり得る事象、結果又はこれらの組合せについて述べることによって、その特徴を記述することが多い。
 - ・リスクは、ある事象の結果とその発生の起こりやすさとの組合せとして表現されることが多い。
 - ・不確かさとは、事象、その結果又はその起こりやすさに関する、情報、理解又は知識が、たとえ部分的にでも欠落している状態をいう。
- ² 信用リスクにおいては、損失額の度数分布では損失をベースとし、0 を最小として損失をプラス表記している。また、オペレーショナルリスクでも損失額の度数分布では損失をベースとし、0 を最小として損失をプラス表記している。
- ³ RiskMetrics は RiskMetrics Solutions, LLC の登録商標である。
- ⁴ ノンパラメトリックな手法は、パラメータを持つ確率分布を想定しない方法をいう。
- ⁵ モンテカルロ法はシミュレーションや数値計算で、乱数を用いて行う手法の総称である。
- ⁶ たとえば、99%信頼水準、収益率の観測分布が1年相当250個とした場合、観測データを小さい方から並べ、2番目のデータが99%分位点となる。つまり、小さい方から2番目のデータは大きい方から249番目に当たり、密度関数の曲線の下側の面積を1%と99%に分ける閾値が分位点となる。また、データ数を2年相当500個とした場合は小さい方から5番目のデータが99%分位点となる。
- ⁷ ブートストラップはデータから再度データを得るという意味の「リサンプリング」の

一種である。1つのデータを除くことにより、重複してサンプリングしないジャックナイフと違い、同じ要素を複数回選べるので復元抽出という。Efron [1979]を参照。

⁸ Choudhry [2013], Chapter 3 を参照。

原文：“VaR is a measure of market risk. It is the maximum loss which can occur with $X\%$ confidence over a holding period of t days.”

なお、本文中では $X\%$ を $\alpha\%$ に、 t days を h days に記号を変更している。

⁹ 保有期間はリスクを計測する期間を指しており、英語では、risk horizon や holding period と表記される。保有しているポートフォリオ（資産・負債）をたたくのに要する期間が基準となり、たとえば、トレーディング勘定に対するマーケットリスク規制では保有期間 10 日を設定している。また、Basel Committee on Banking Supervision [2013] では商品ごとに 10 日から 1 年にわたる 5 つの流動性ホライズンに分類する方向で検討されている。

¹⁰ 信頼水準 α は通常発生しうる損益の範囲を示し、 $1 - \alpha$ は滅多に発生しえない損益の範囲を示している。

¹¹ 青沼・村内 [2009], p.11 を参照。

¹² マーケットリスク規制では保有期間は 10 日とされているが、保有期間 1 日の VaR の $\sqrt{10}$ 倍より求めてもよいとしている。

¹³ コピュラは同時分布に含まれる情報の中から周辺分布間の相関構造だけを取り出して関係を示したものである。吉羽 [2014] を参照。

¹⁴ 資産・負債のキャッシュフローを、近接するグリッド・ポイントにマッピングする。

¹⁵ 個別取引件別の評価の積み上げによるボトムアップアプローチから算出される。

¹⁶ McNeil, Frey and Embrechts [2005]において、観測データ数が少ないときには有効な手法として取り上げている。また、モンテカルロ法でもこの方法により推定することもあろうとしている。

¹⁷ 本研究ではデータの鮮度を重視するため、観測データ数は 251 個（1 年相当）としており、観測データ数 251 個は「データ数が少ないとき」に該当する。

¹⁸ たとえば、10 日収益率を計算するのに、重複しない 10 日分のデータを利用する方法である。つまり、1 年を 250 日とすると 25 個の収益率データしか取得できない。

¹⁹ たとえば、10日収益率を計算するのに、重複を許して10日分のデータを利用する方法である。この方法では1年を250日とすると241個の収益率データが取得できる。ただし10日のうち9個のデータが重複することとなり、データ間の相関が高くなることで独立とは言えなくなってしまう。

²⁰ http://www.ffr-plus.jp/material/pdf/0006/risk_meter_quantification_03.pdf

²¹ independent and identically distributed この条件が成立すれば、収益率（損失率）の時系列データは無作為標本と言える。

²² 時系列分析における分散不均一モデルのことである。一般的にはGARCH(1,1)を採用することが多い。

GARCH(p, q)

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

²³ 日本銀行金融機構局 [2011] の pp.9-10 を参照。

²⁴ モンテカルロ法で仮定する確率分布が、現実の損失率の観測分布と当てはまりが良いという条件をいう。当てはまりが良くない確率分布を仮定すれば、たとえデータ数を多くすることができたとしても良い推定値が計測できるはずはない。

²⁵ Basel Committee on Banking Supervision [2010] Revisions to the Basel II market risk framework.

http://www.fsa.go.jp/policy/basel_ii/35.pdf

第 2 章 収益率分布における非正規分布への対応

2.1 はじめに

Value-at-Risk 推定の 3 つの手法において、パラメトリックな手法である分散共分散法では、現実のファットテイルな損失率分布と比較して、正規分布を仮定した予測分布が過小評価という問題を引き起す。これに対しヒストリカル法は、現実のファットテイルな損失率分布が反映できる手法として広く使用されている。しかしヒストリカル法は、過去データへの依存度が高い、データサイズを確保できない等、欠点も多く万全とは言い難い。さらに、モンテカルロ・シミュレーション法は有効な手法であるが、システム負荷の問題が常に存在する。つまり、ある 1 つの手法が特に優れていることでもなく、3 者 3 様でメリット、デメリットの両方をそれぞれに持っている。

日本銀行金融機構局[2011]¹ では Value-at-Risk 推定の技術的限界として以下の 4 つの事項を指摘している。

- [1] 将来のリスクファクター変動が過去の変動と同じとは限らないこと（「定常性の仮定」の問題）。
- [2] リスクファクター変動に特定の分布を仮定するとリスクを過小評価する可能性があること（ファットテイル性の問題）。
- [3] リスクファクター同士の稀で極端な事象を含めた相関構造やその変化を把握することが困難であること。
- [4] VaR を超える損失の規模を評価できないこと（テイルリスクの問題）。

[1]~[4]までの技術的限界のすべてを 1 つの手法だけでカバーできるものではなく、複数の手法を併用することでそれぞれの問題に対処できるものである²。本章では上記

で指摘されている技術的限界のうち、「ファットテイル性の問題」に対処するための方策として、ヒストリカル法の適用以外の手法である「正規性の緩和」と呼ばれる方法に注目する。正規分布には似ているが正規分布より裾が厚いとされる複数の非正規分布を仮定して Value-at-Risk 推定を実施して分析を行う。

本章では、非正規分布を仮定した複数の Value-at-Risk を推定することにより、それぞれの非正規分布の特徴を捉えていく。その上で、リスク計測への応用範囲を拡大させる方法を考察する。また、分散共分散法においてパラメータとなる平均と標準偏差に加え、歪度と尖度が Value-at-Risk 推定に及ぼす影響を分析する。特にジョンソン SU 分布を仮定した Value-at-Risk 推定値を、リスク推定量に加えリスク量のベンチマークとして役立てる方法を検討する。

具体的には、2008 年秋に起きたリーマン・ショック時の大きな価格変動が観測データから抜けていく期間と、さらに東日本大震災の影響を含む期間を評価期間として設定した。前者ではリスク量が低下していく過程、後者ではリスク量が上昇していく過程という、両方向の推移分析を実施することができる。

本章の構成は以下のとおりである。2.2 節では、本章における Value-at-Risk 推定のパラメータと前提条件を設定する。そして実際の推定方法とその計測結果をまとめる。2.3 節では、比較分析として 1 時点における 4 つの統計量の分析では歪度及び尖度がリスク量に及ぼす影響を捉える。さらに、観測期間の統計量（平均、標準偏差、歪度、尖度）の変動の分析等を実施する。2.4 節では、推定した正規分布及び非正規分布 Value-at-Risk のバックテストを実施して、モデルの適切性を確認する。2.5 節では、前提とした観測期間より抽出できる範囲で分析を行い、結論としてまとめる。

2.2 Value-at-Risk 推定の計測と結果

Value-at-Risk 推定にはその前提として保有期間と信頼水準がある。保有期間は保有する資産及び負債のリスク量を計測する期間を示す。本章では保有期間は 1 日とし、また

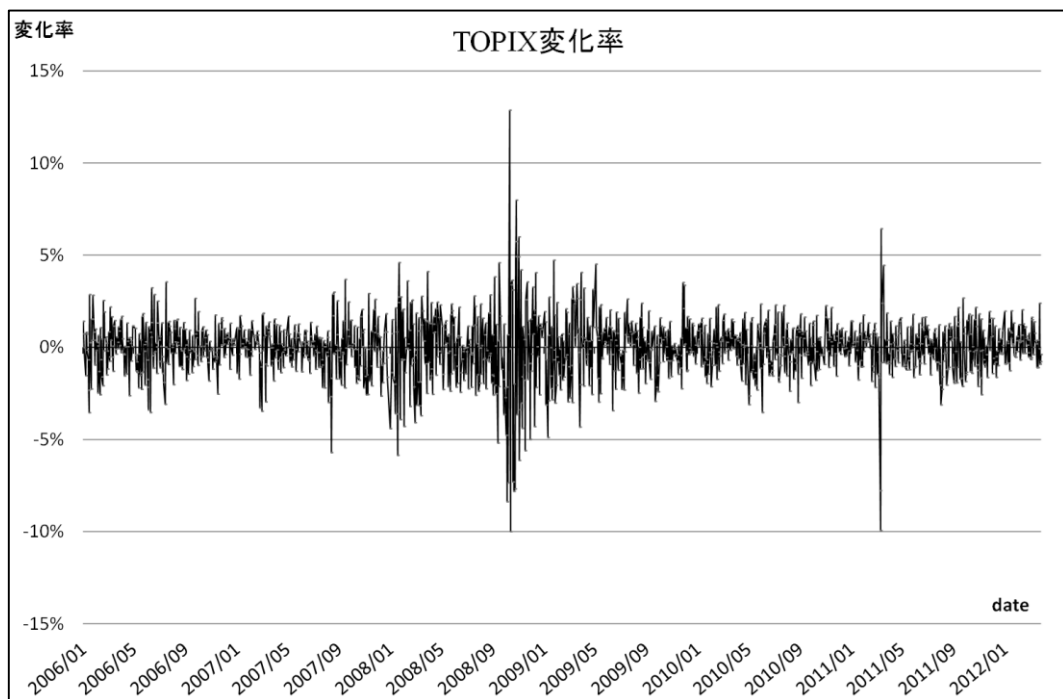
信頼水準は一般的に使われている 99%を使用する。次に価値変動の要因となるリスクファクターの前提を決定しておく。本章ではリスクファクターを株式指数とし、TOPIXを使用する。推定した Value-at-Risk 推定結果はパーセント表記しており、Value-at-Risk 推定結果を金額表示するには、基準日におけるエクスポージャーの金額に Value-at-Risk 推定結果を掛けることで計算すればよい。

その他の前提として、リスクファクター変動は対数収益率とし観測期間は 500 日（2年相当）とする。観測期間として取得した日次収益率データは、2008 年 8 月 1 日より 2011 年 9 月 30 日までとし、Yahoo ファイナンスより取得した TOPIX を使用する。なお、分析をわかりやすくするために株式指数の変動リスクのみを対象とし、評価期間は 2010 年 10 月 1 日より 2011 年 9 月 30 日までの 1 年間とする。

図 2-1 では TOPIX 推移と TOPIX 変化率を示した。本章では 2010 年 10 月より 2011 年 9 月までを分析対象としているが、リーマン・ショックのデータが含まれているため、リーマン・ショックの影響を把握できるよう 2006 年 1 月より 2012 年 3 月までを表記している。

図 2-1 TOPIX 推移と変化率

2006年1月～2012年3月



(出所) 東京証券取引所

2.2.1 Value-at-Risk 推定の計測

分析の基準となる正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定では、起こりうる最大損失という観点から正規分布の 99%分位点を Value-at-Risk 値としている。これを Normal-VaR と表記する。

次に、正規分布に対する比較対象とすべき非正規分布として、ロジスティック分布、双曲線正割分布 (Hyperbolic-Secant Distribution) 及びラプラス分布を採用した。3 分布共にパラメータは正規分布と同じく、平均と標準偏差であり、歪度と尖度は平均と標準偏差の値に関係なく、一定の値を採ることがわかっている³。各確率分布におけるパラメータについてはモーメント法により推計している。さらに、正規分布の進化系としてのジョンソン SU 分布も採用している。正規分布のパラメータは平均と標準偏差の 2 つであるが、一方、ジョンソン SU 分布では平均・標準偏差・歪度・尖度の 4 つの統計量が必要となり、統計量が 2 つ増えることにより正規分布や他の非正規分布より現実の収益率分布に近似できると判断している。

なお、ジョンソン SU 分布のパラメータについては第 4 章 Appendix F の Tuenter [2001] の方法に依っている。以上、4 つの各非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定を、それぞれ Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR, Johnson-VaR と表記する。

2.2.2 Value-at-Risk 推定の結果

図表 2-2 Value-at-Risk 推定結果より視覚的にわかった事項を示す。

まず最も特徴的な Johnson-VaR については、「安定期」では Normal-VaR との比例関係を保っているが、「変動期」では大きく変動していることがわかる。この原因となるのは、他の確率分布ではパラメータとなっていない歪度及び尖度の変動による影響があると予想できる。Johnson-VaR は当初 2010 年 10 月には 5.5%程度で最もレベルが高くなっていたが、東日本大震災直前には 3%強となり、Normal-VaR に最も近づいている。

次に、東日本大震災の影響として 2011 年 3 月 11 日直後もすべての確率分布において大きく変動していることがわかる。ただし、Normal-VaR, Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR の 4 分布については Value-at-Risk のレベルは上昇したものの一時的な変動であり、Value-at-Risk のレベルも 3 か月程度で徐々に低下して元のレベルまで到達し安

定していくことがわかった。しかし、Johnson-VaR はレベルの低下傾向は鈍くなっており、4%程度で高水準のまま推移している。

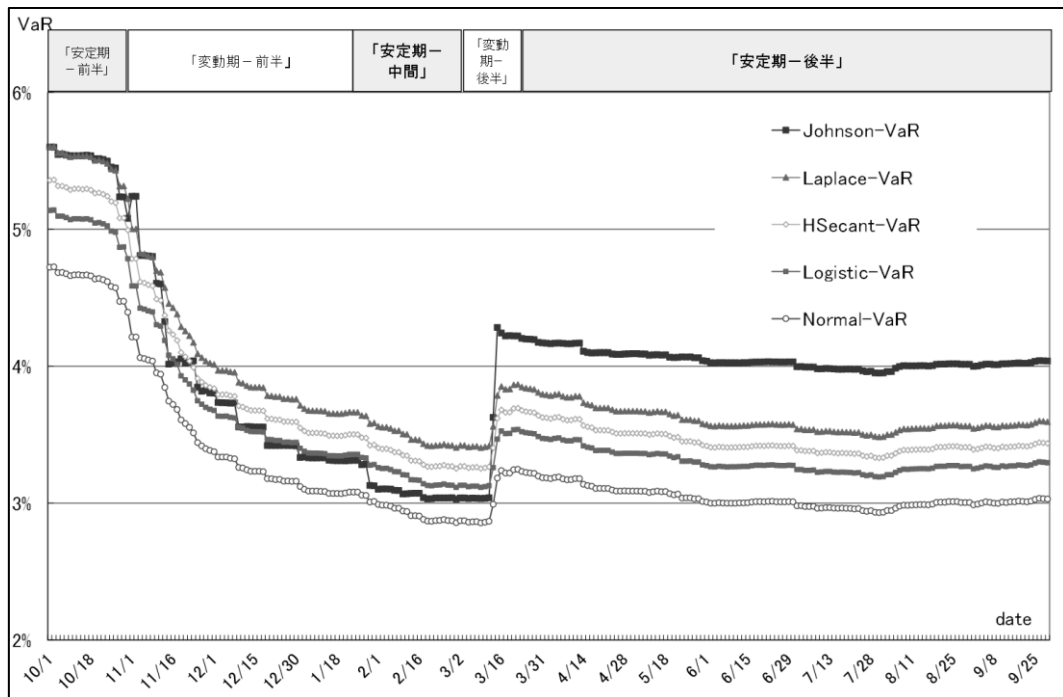
さらに、Normal-VaR と Logistic-VaR と HSecant-VaR と Laplace-VaR は、4 分布ともパラメータが位置と尺度であるため比例関係を保持していることがわかる。各非正規分布を仮定した Value-at-Risk 値が比例的に推移しており、それぞれの水準が逆転していないことが視覚的に確認できる。

最後に、各統計量（平均、標準偏差、歪度、尖度）の変動及び推移については、まず当日と前日による対数収益率であり、1 日の変動を見ているにもかかわらず、大きく変動する場面があることがわかった。一番古いデータが抜ける影響と最新のデータが加わる影響の、2 つの影響が存在することが原因となっている。

各統計量の特徴を述べると、平均については、変動は小さく安定的である。標準偏差については、他の統計量（平均、歪度、尖度）と比べて変動そのものは小さいが注意が必要である。歪度については、前日比で符号が反転する場面があり、その場合は比較的変動も大きい。尖度については、急に大きく変動する場面があり、変動は非常に大きくなる。

図 2-2 Value-at-Risk 推定結果

(2010 年 10 月 1 日～2011 年 9 月 30 日)



(出所) 筆者作成

【図 2-2 における期間の区分について】

5 種類すべての Value-at-Risk の推移を基準として「変動期」と「安定期」の大きく 2 つに区分する。変動期については、2010 年 10 月後半から 2011 年 1 月後半までを「変動期-前半」とする。2011 年 3 月 11 日直後も急激に変動しており、3 月 14 日からの 3 営業日を含む 2 週間程度の期間を「変動期-後半」とする。「安定期」については、上記「変動期」に該当しない期間を「安定期-前半」「安定期-中間」「安定期-後半」の 3 つに区分している。

2.3 Value-at-Risk 推定の結果分析

「変動期-前半」に Value-at-Risk 推定値が急激な下落傾向を示す真の理由は、2008 年秋に起きたリーマン・ショック時の大きな変動データが、観測期間（500 日）のデータから徐々に除外されていくことにある。図 2-1 TOPIX 推移からわかるように、2009 年 3 月までは低下傾向が続き 700 ポイントまで低下する。その後、800 - 1000 ポイントのレンジで安定した推移となる。つまり、大きな変動データが徐々に除外されていくことにより、Value-at-Risk 推定値も同様に高レベルから低レベルへ推移することが予測できる。

ここでは、歪度及び尖度の変動による影響を分析する方法として、「1 時点における 4 つの統計量の分析」を取り上げる。さらに 4 分布の比例関係と統計量（平均、標準偏差、歪度、尖度）の変動について詳細に考察する。

2.3.1 1 時点における 4 つの統計量の分析

1 時点における 4 つの統計量（平均、標準偏差、歪度、尖度）の分析の手順を述べる。

- [1] 正規分布は平均と標準偏差の 2 つの統計量により確率分布の形が決まる。正規分布を仮定したパラメトリックな手法により Value-at-Risk を推定する。前項同様、これを Normal-VaR と表記する。
- [2] ジョンソン SU 分布は平均、標準偏差、歪度、尖度の 4 つの統計量により確率分布の形が決まる。ジョンソン SU 分布を仮定した Value-at-Risk を推定する。前項同様、これを Johnson-VaR と表記する。
- [3] 上記の方法を使い、平均、標準偏差、尖度の 3 つの統計量を用いて Value-at-Risk を推定する。これを 3moment-VaR⁴とする。つまり、ジョンソン SU 分布を用いて、歪度を 0 に固定させた上で Value-at-Risk を推定する。
- [4] Normal-VaR と Johnson-VaR の差は、歪度と尖度、2 つのパラメータの影響度を示している。そのうち Normal-VaR と 3moment-VaR の差は尖度が及ぼす Johnson-VaR への影響度を示しており、3moment-VaR と Johnson-VaR の差は、歪度が及ぼす Johnson-VaR への影響度を示している。歪度と尖度の影響度を算出して分析する。以下に、計算式を示す。

(Johnson-VaR) - (Normal-VaR) = Johnson-VaR に対する歪度及び尖度の影響度

(Johnson-VaR) - (3 moment-VaR) = Johnson-VaR に対する歪度の影響度

(3moment-VaR) - (Normal-VaR) = Johnson-VaR に対する尖度の影響度

- [5] 上記，歪度に対する，Johnson-VaR への歪度の影響度の割合を算出し，Skewness 比率と呼ぶ。また，尖度に対する，Johnson-VaR への尖度の影響度の割合を算出し，Kurtosis 比率と呼ぶ。

$$\text{Skewness 比率} = \frac{\text{Johnson-VaR に対する歪度の影響度}}{\text{歪度}}, \text{ (単位: \%)} \quad (2.1)$$

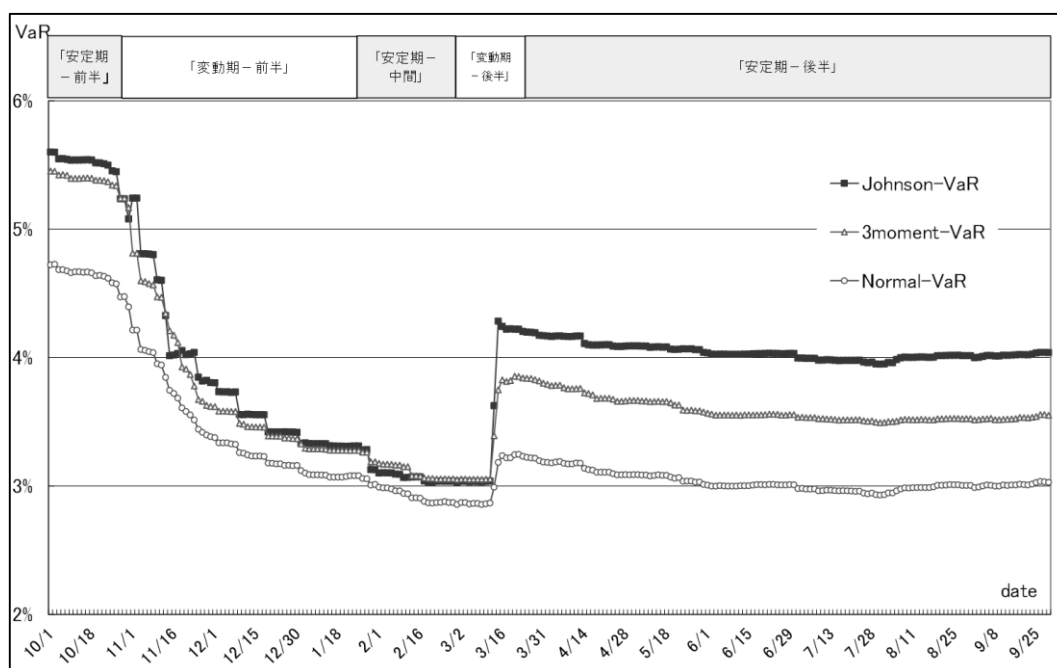
$$\text{Kurtosis 比率} = \frac{\text{Johnson-VaR に対する尖度の影響度}}{\text{尖度}}, \text{ (単位: \%)} \quad (2.2)$$

- [6] Skewness 比率により，歪度 1 単位当たりの Johnson-VaR への影響度が計算できる。同じく，Kurtosis 比率により，尖度 1 単位当たりの Johnson-VaR への影響度が計算できる。これら Skewness 比率及び Kurtosis 比率⁵を計算して，Johnson-VaR に対する歪度及び尖度の影響度を分析する。

なお，[3]で定義した 3 moment-VaR については第 2 章 Appendix B に詳細を記載した。

図 2-3 Johnson-VaR, Normal-VaR, 3Moment-VaR の比較

(2010年10月1日～2011年9月30日)



(出所) 計算結果をもとに筆者が作成.

【図 2-3 分析結果】

「安定期-前半」においては、Johnson-VaR, 3moment-VaR, Normal-VaR の3者はレベルこそ異なるが、同じような推移を示している。次に「変動期-前半」(リスクレベル下降)においては、Johnson-VaR と 3moment-VaR はほぼ同じように推移しているが、Normal-VaR は一段レベルが低い状況で比例的に推移している。ただし、Johnson-VaR は階段状に低下していくことが特徴的である。次に「安定期-中間」においては、Johnson-VaR と Normal-VaR との乖離が最も小さくなる時期となっている。次に「変動期-後半」においては東日本大震災の影響を被る 2011 年 3 月 14 日がイベント日となり、Johnson-VaR と 3moment-VaR は大きな変動 (+1.1%強, +0.8%弱) を示しているが、Normal-VaR では +0.35%程度の上昇となっている。「安定期-後半」においては、Johnson-VaR については 4%、3moment-VaR は 3.5%を維持しており、高レベルでの安定と見なせよう。一方、Normal-VaR は 3%程度となり、イベント発生後 2 か月程度で安定した推移となっているが、イベント直前のレベルまでは下がっていない。すなわち、東日本大震災の影響は

一過性のテイル事象であると判断する可能性は高いが、Johnson-VaR や 3moment-VaR がイベント前のレベルまで低下していないため、場合によっては変動するリスクがあることを示唆している。

手順[5]で定義した「Skewness 比率」「Kurtosis 比率」の分析結果は、表 2-1 に示した。まず、リスクレベル下降局面（2010 年 10 月～2011 年 1 月）では Johnson-VaR の変動（下落幅）が大きい観測日 10 個を抽出した。

Johnson-VaR の変動が最も大きくなっている観測日は 2010 年 11 月 4 日となっており、その数値は-0.434%である。歪度の影響も考えられるが、それ以上に標準偏差の変動が-0.000549 と最も大きくなっており、標準偏差の変動の影響が強いと判断した。また、尖度も大きく低下しており、下落幅は-1.148 となり尖度の影響も大きいと判断した。次に Johnson-VaR の変動が大きくなっている観測日は 2010 年 11 月 15 日となっており、その数値は-0.312%である。歪度の影響に加え、標準偏差の変動も-0.000361 と 2 番目大きくくなっていることから、歪度の影響と標準偏差の影響が強いと判断した。3 番目に Johnson-VaR の変動が大きくなっている観測日は 2010 年 11 月 12 日となっており、その数値は-0.275%である。この観測日は 2010 年 10 月 27 日と 2011 年 1 月 28 日と同様、歪度の符号が反転した観測日となっている。歪度の符号が反転した観測日の特徴は Skewness 比率の前日差が極めて大きくなっていることである。2010 年 10 月 27 日では +0.929%、2010 年 11 月 12 日では-1.056%、2011 年 1 月 28 日では-0.991%となっている。リスクレベル下降局面においては歪度の符号がマイナスからプラスに反転するとき、歪度の変動の影響を強く受け、Johnson-VaR の下落が大きくなる傾向がある。

リスクレベル高騰局面（2011 年 3 月）では Johnson-VaR の変動（上昇幅）が大きい観測日 2 個を抽出した。2011 年 3 月 15 日では+0.588%、3 月 16 日では+0.657%となっている。2011 年 3 月 15 日と 3 月 16 日では東日本大震災直後の推移を示しており、2011 年 3 月 14 日と 3 月 15 日の 2 日間で標準偏差・歪度・尖度、3 つのパラメータが大きく変動している。Skewness 比率と Kurtosis 比率を見ても大きく変動していることがわか

る。Value-at-Risk のレベル（リスク増大傾向）も大きく変動したが、その後 2 か月程度で安定していくことがわかった。

東日本大震災の影響を確認するため、図 2-4 実際の日次収益率分布において 2011 年 3 月 14 日～3 月 16 日の収益率分布を示した。3 月 15 日には大きなマイナス変動が加わり、3 月 16 日には大きなプラス変動が加わることで分布形状が大きく変動していくのが確認できる。

表 2-1 Skewness 比率, Kurtosis 比率の分析結果

1) リスクレベル下降局面 (2010年10月~2011年1月)

	10/26	10/27	10/28	10/29	11/02	11/04	11/09	11/10
平均	-0.000357	-0.000189	-0.000211	-0.000073	-0.000347	-0.000115	-0.000260	-0.000083
標準偏差	0.019525	0.019164	0.019162	0.018878	0.017980	0.017431	0.017265	0.016968
(前日差)		-0.000362		-0.000284		-0.000549		-0.000297
歪度	-0.100	0.033	0.037	0.134	-0.535	-0.250	-0.273	-0.159
(前日差)		0.134		0.098		0.285		0.114
尖度	10.283	10.357	10.361	10.534	7.494	6.346	6.499	6.292
(前日差)		0.074		0.173		-1.148		-0.206
Normal-VaR	4.578%	4.477%	4.479%	4.399%	4.218%	4.067%	4.042%	3.956%
Johnson-VaR	5.452%	5.241%	5.241%	5.085%	5.246%	4.812%	4.806%	4.610%
(前日差)		-0.211%		-0.156%		-0.434%		-0.196%
3moment-VaR	5.343%	5.247%	5.246%	5.173%	4.818%	4.603%	4.570%	4.477%
歪度の影響	0.109%	-0.005%	-0.005%	-0.089%	0.428%	0.208%	0.236%	0.132%
尖度の影響	0.765%	0.769%	0.767%	0.773%	0.599%	0.536%	0.527%	0.521%
歪度尖度の影響	0.873%	0.764%	0.761%	0.685%	1.027%	0.745%	0.763%	0.654%
Skewness比率	-1.081%	-0.152%	-0.144%	-0.660%	-0.800%	-0.834%	-0.865%	-0.833%
(前日差)		0.929%		-0.516%		-0.034%		0.032%
Kurtosis比率	0.074%	0.074%	0.074%	0.073%	0.080%	0.084%	0.081%	0.083%
(前日差)		0.000%		-0.001%		0.005%		0.002%

	11/11	11/12	11/12	11/15	11/24	11/25
平均	-0.000035	0.000099	0.000099	0.000263	-0.000219	-0.000089
標準偏差	0.016946	0.016587	0.016587	0.016226	0.015024	0.014772
(前日差)		-0.000359		-0.000361		-0.000252
歪度	-0.165	0.009	0.009	0.194	-0.296	-0.195
(前日差)		0.174		0.184		0.101
尖度	6.324	5.897	5.897	5.414	4.310	4.026
(前日差)		-0.427		-0.483		-0.284
Normal-VaR	3.946%	3.849%	3.849%	3.748%	3.517%	3.445%
Johnson-VaR	4.605%	4.331%	4.331%	4.018%	4.044%	3.850%
(前日差)		-0.275%		-0.312%		-0.193%
3moment-VaR	4.474%	4.348%	4.348%	4.214%	3.782%	3.677%
歪度の影響	0.132%	-0.018%	-0.018%	-0.195%	0.261%	0.173%
尖度の影響	0.527%	0.499%	0.499%	0.465%	0.265%	0.231%
歪度尖度の影響	0.659%	0.481%	0.481%	0.270%	0.526%	0.404%
Skewness比率	-0.799%	-1.854%	-1.854%	-1.006%	-0.881%	-0.886%
(前日差)		-1.056%		0.848%		-0.006%
Kurtosis比率	0.083%	0.085%	0.085%	0.086%	0.062%	0.057%
(前日差)		0.001%		0.001%		-0.004%

	12/08	12/09	12/17	12/20	01/27	01/28
平均	0.000140	0.000262	0.000175	0.000265	0.000167	0.000244
標準偏差	0.014364	0.014143	0.013973	0.013793	0.013222	0.013046
(前日差)		-0.000222		-0.000180		-0.000176
歪度	-0.202	-0.112	-0.138	-0.067	-0.044	0.043
(前日差)		0.091		0.071		0.087
尖度	4.087	3.850	3.927	3.786	3.870	3.676
(前日差)		-0.237		-0.141		-0.193
Normal-VaR	3.328%	3.264%	3.233%	3.182%	3.059%	3.011%
Johnson-VaR	3.735%	3.560%	3.558%	3.424%	3.286%	3.131%
(前日差)		-0.175%		-0.134%		-0.155%
3moment-VaR	3.585%	3.492%	3.462%	3.394%	3.267%	3.192%
歪度の影響	0.150%	0.068%	0.096%	0.030%	0.019%	-0.061%
尖度の影響	0.257%	0.227%	0.229%	0.212%	0.208%	0.181%
歪度尖度の影響	0.407%	0.296%	0.325%	0.242%	0.227%	0.120%
Skewness比率	-0.741%	-0.611%	-0.692%	-0.447%	-0.425%	-1.416%
(前日差)		0.130%		0.246%		-0.991%
Kurtosis比率	0.063%	0.059%	0.058%	0.056%	0.054%	0.049%
(前日差)		-0.004%		-0.002%		-0.005%

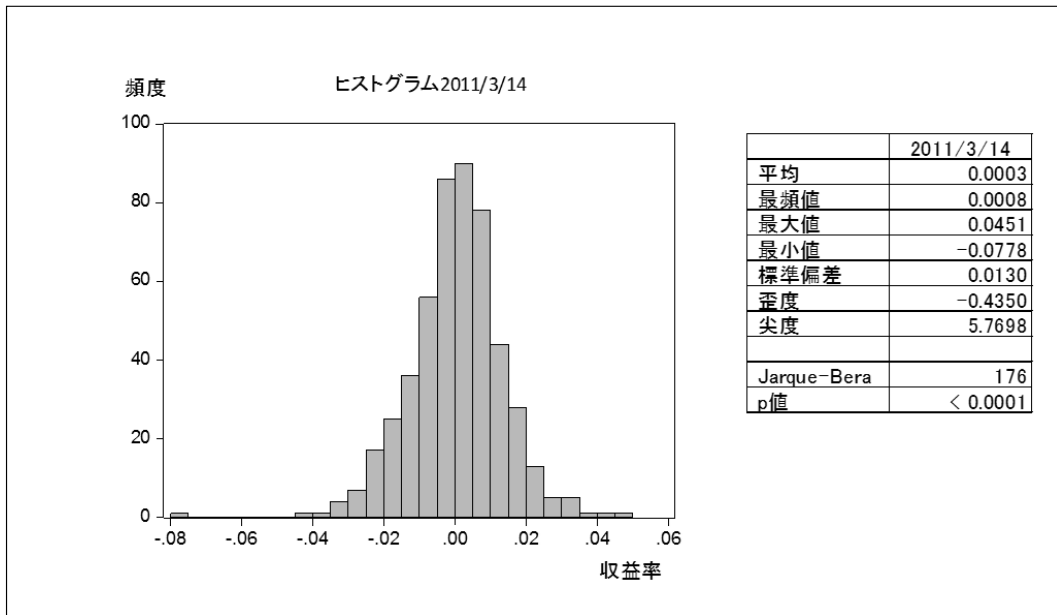
2) リスクレベル高騰局面（2011年3月）

	03/11	03/14	03/15
平均	0.000452	0.000255	0.000064
標準偏差	0.012533	0.012980	0.013725
（前日差）		0.000447	0.000744
歪度	-0.037	-0.435	-1.097
（前日差）		-0.398	-0.662
尖度	3.629	5.770	10.162
（前日差）		2.141	4.393
Normal-VaR	2.870%	2.994%	3.186%
Johnson-VaR	3.042%	3.630%	4.287%
（前日差）		0.588%	0.657%
3moment-VaR	3.058%	3.395%	3.753%
歪度の影響	-0.016%	0.234%	0.533%
尖度の影響	0.187%	0.400%	0.567%
歪度尖度の影響	0.171%	0.635%	1.100%
Skewness比率	0.439%	-0.539%	-0.486%
（前日差）		-0.978%	0.053%
Kurtosis比率	0.052%	0.069%	0.056%
（前日差）		0.018%	-0.014%

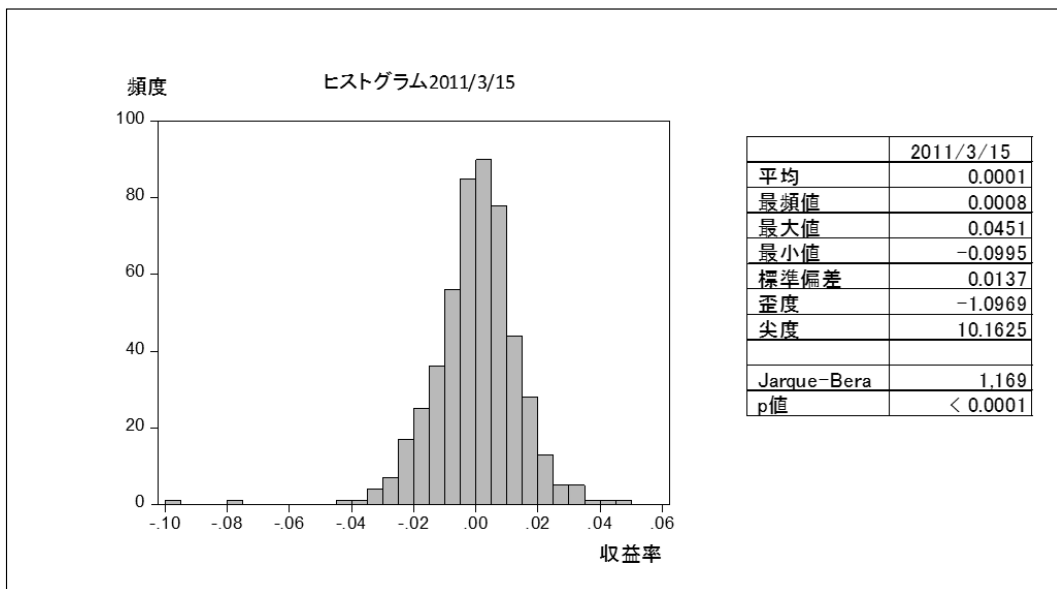
（出所）筆者作成

図 2-4 実際の日次収益率分布

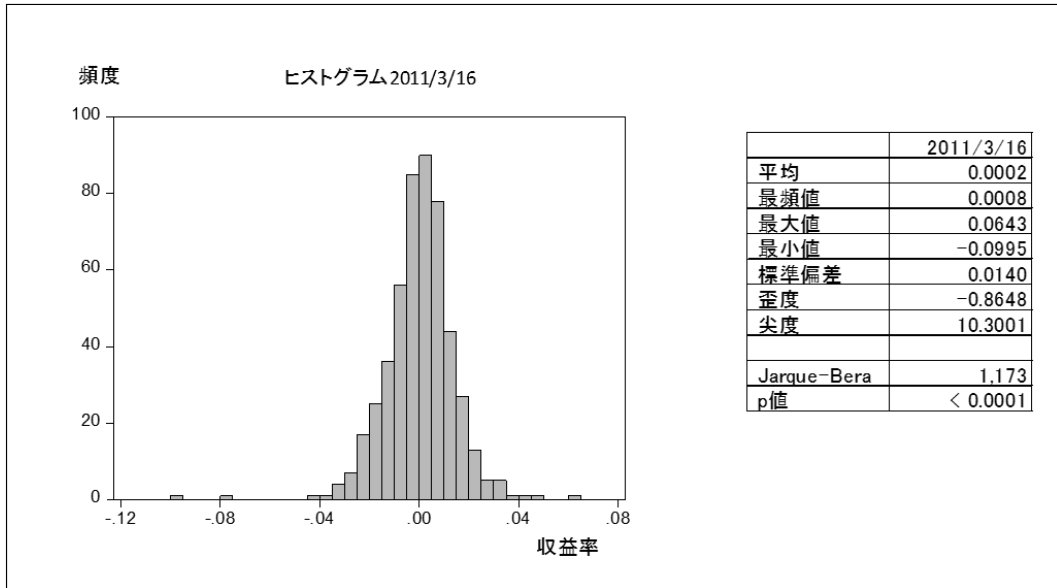
(2011年3月14日)



(2011年3月15日)



(2011年3月16日)



(出所) 観測データより筆者作成

2.3.2 4分布の比例関係の考察

2.2.2 Value-at-Risk 推定の結果を再掲する.

「Normal-VaR と Logistic-VaR と HSecant-VaR と Laplace-VaR は、4分布ともパラメータが位置と尺度であるため比例関係を保持している」

つまり、 $Laplace-VaR > HSecant-VaR > Logistic-VaR > Normal-VaR$ という大小関係が成立していることを視覚的に確認した.

表 2-2 各分布の 99%分位点

標準分布	99%分位点
標準正規分布	2.326348
標準ロジスティック分布	2.533422
標準双曲線正割分布	2.644204
標準ラプラス分布	2.766218

(出所) 筆者作成

表 2-4 では各分布の標準分布の逆関数より 99%分位点を算出して示した. 上記, 大小関係はこの表より確認でき, 信頼水準が 99%であればこの関係は成立する. この関係を利用して, 複数 Value-at-Risk を同時に計測した上で, リスク基準を段階的に上下にシフトする方法を考察する.

本章で設定した観測期間はリスクレベルが低下傾向を示す時期であり, リスクレベルの低下を, 単にリスクが小さくなったことを示していると捉えるのは短絡的すぎる. しかもレベル自体が低下すれば, 逆に急激に上昇する危険もあることを絶対に忘れてはならない. この時の影響は計り知れない.

本章では同一の観測分布, 保有期間, 信頼水準を用いて Normal-VaR, Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR という 4 種類の Value-at-Risk 推定を実施した. そこで, そ

これらの仮定した確率分布と現実の観測データ分布とのあてはまり具合を分析した上で月次や週次で過小評価とされないレベルを決定する方法を提案する。

たとえば、リスクレベルが一番小さい Normal-VaR を「標準レベル」としよう。Logistic-VaR を「第二レベル」、HSecant-VaR を「第三レベル」、Laplace-VaR を「最大レベル」としよう。たとえばリスクが増大していく過程においては、通常時では「標準レベル」を適用し、「標準レベル」から次にリスク量が小さい「第二レベル」へ上方に移行する。次に「第二レベル」から「第三レベル」へ上方に移行する。さらに「第三レベル」から「最大レベル」へ移行する等、リスクが増大する過程においては、リスクレベルを段階的に上方シフトすることで機動的な対応を図る方法を採用。すなわち、リスクレベルが上昇傾向を示す時期での対応策として、リスクが過小評価とされないことが目的となる。

付言すると、リスクレベルを下げることはリスクを過小評価することにつながるため、「標準レベル」である Normal-VaR 以下に引き下げる方策は望ましくない。しかしながら、「最大レベル」から順次引き下げていき、「標準レベル」まで戻すことは当然にありうるだろう。

2.3.3 統計量（平均，標準偏差，歪度，尖度）変動の考察

直近1年相当の期間のうち、すべての統計量（平均，標準偏差，歪度，尖度）変動で最小値を示したのは2010年11月1日である。前日比，平均：-0.000277，標準偏差：-0.000898，歪度：-0.669051，尖度：-3.040758となった。観測期間のうち，平均と歪度の統計量変動で最大値を示したのは2010年11月4日である。前日比，平均：0.000232，歪度：0.285127となった。標準偏差と尖度の統計量変動で最大値を示したのは，2011年3月15日である。前日比，標準偏差：0.000744，尖度：4.392687となった。

表2-3，図2-5日次収益率の比較においては，該当日の前日差の表と各観測日のヒストグラムを示した。表2-3の4番目の2011年5月9日については，最も差額が小さい観測日となるが，この原因は観測データから外れたデータが-0.003851，当日のデータが-0.003849というように，偶然にもほぼ同じレベルの収益率だったことによる。5番目の2011年8月8日については，図2-2 Value-at-Risk 推定結果（2010年10月1日～2011年

9月30日)からわかるように、東日本大震災以後の安定期の一例として示したものである。

各統計量(平均, 標準偏差, 歪度, 尖度)変動の特徴を述べる。平均は変動が最も小さく, 最小値-0.000277から最大値0.000232が変動範囲となった。標準偏差も比較的変動が小さく最小値-0.000898から最大値0.000744が変動範囲となった。ただし, 標準偏差の変動はValue-at-Risk推定値に対する影響は大きいので特に注意すべきである。

一方, 歪度については比較的変動が大きく, 最小値-0.669051から最大値0.285127が変動範囲となった。歪度の変動には大きな特徴が存在しており, 『歪度の符号が反転する』という現象が頻発することがわかった。この歪度の符号が反転するタイミングがValue-at-Risk推定値に大きな影響を及ぼし, 特に歪み・尖りに対応するJohnson-VaRの推移に大きく影響を及ぼす。これ以降のValue-at-Risk推定値が大きくなるか, あるいは小さくなるかという方向性を示唆している。

最後に尖度については最も変動が大きく, 最小値-3.040758から最大値4.392687が変動範囲となった。ただし, 最小値, 最大値の両方とも極端に大きな変動を示したものであり, 尖度の平均的な変動レベルを認識しておく必要がある。

なお, 表2-5 日次収益率の比較において選定した観測日のヒストグラムを図2-5 日次収益率の比較(ヒストグラム)に示した。1日の変動とはいえ, 2010年10月29日と11月1日の対比, 2010年11月2日と11月4日の対比と2011年3月14日と3月15日の対比の3つの図では分布形状の変化が見てとれる。特に収益率の範囲(横軸)が拡大する様子がわかる。

表 2-3 日次収益率の比較

(該当日の前日差)

	2010/10/29	2010/11/01	前日差
平均	-0.000073	-0.000349	-0.000277
標準偏差	0.018878	0.017980	-0.000898
歪度	0.134202	-0.534849	-0.669051
尖度	10.534220	7.493462	-3.040758

	2010/11/02	2010/11/04	前日差
平均	-0.000347	-0.000115	0.000232
標準偏差	0.017980	0.017431	-0.000549
歪度	-0.535051	-0.249924	0.285127
尖度	7.493626	6.345507	-1.148119

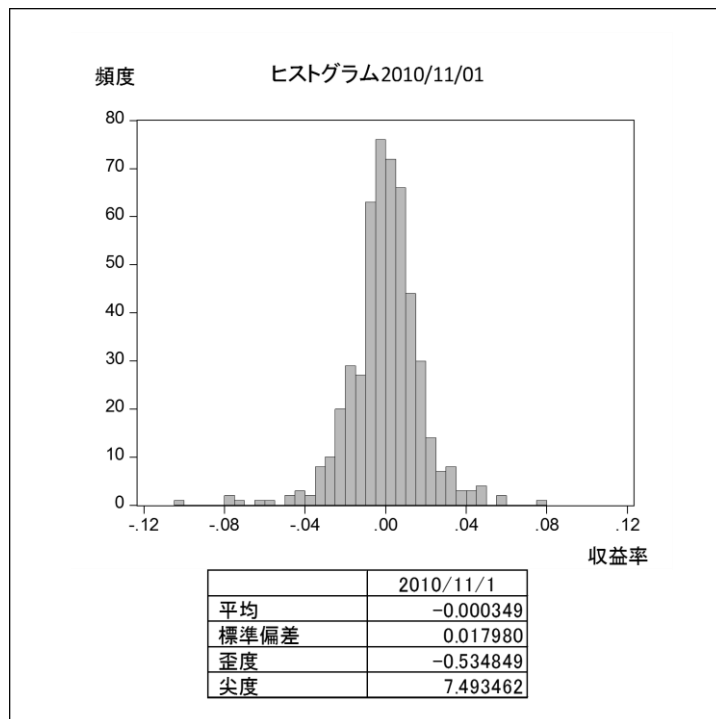
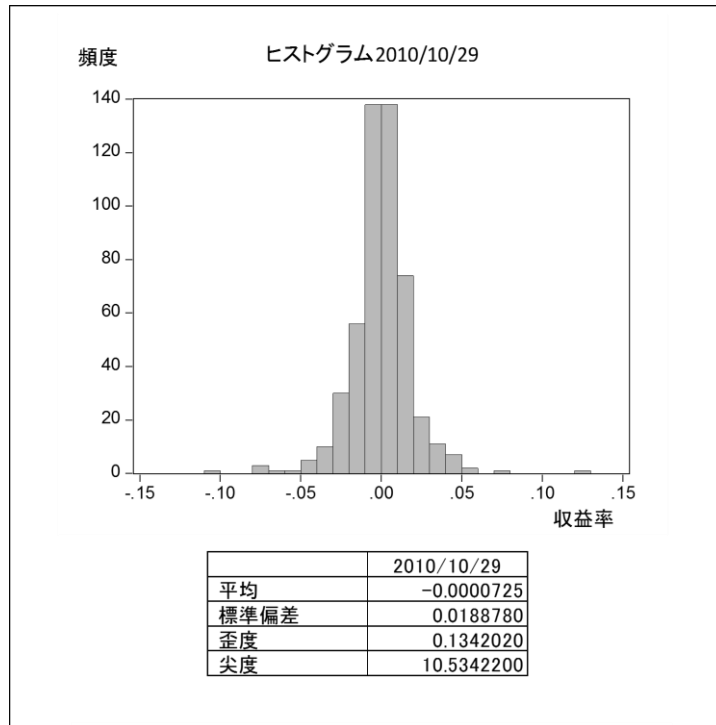
	2011/03/14	2011/03/15	前日差
平均	0.000255	0.000064	-0.000191
標準偏差	0.012980	0.013725	0.000745
歪度	-0.434991	-1.096876	-0.661885
尖度	5.769793	10.162480	4.392687

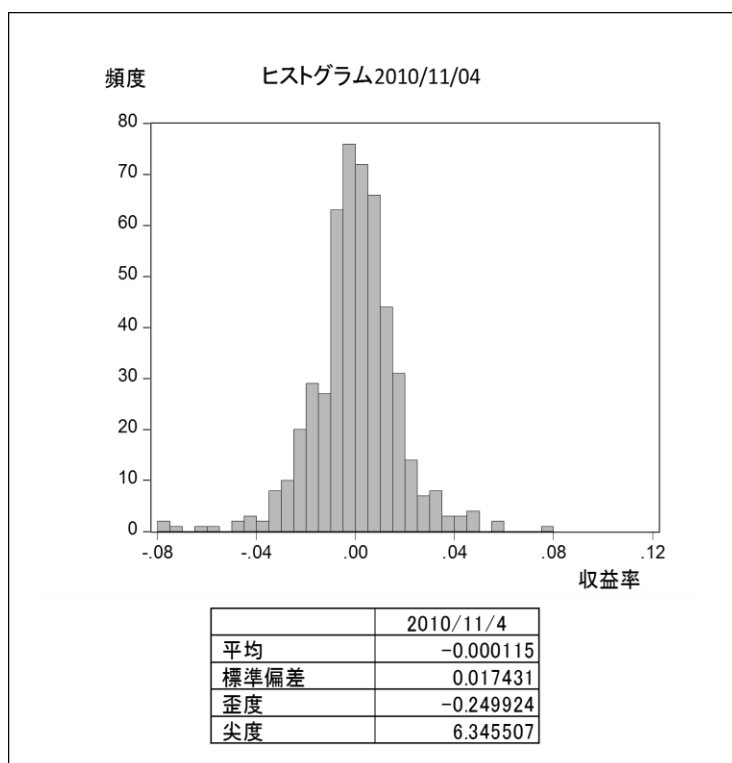
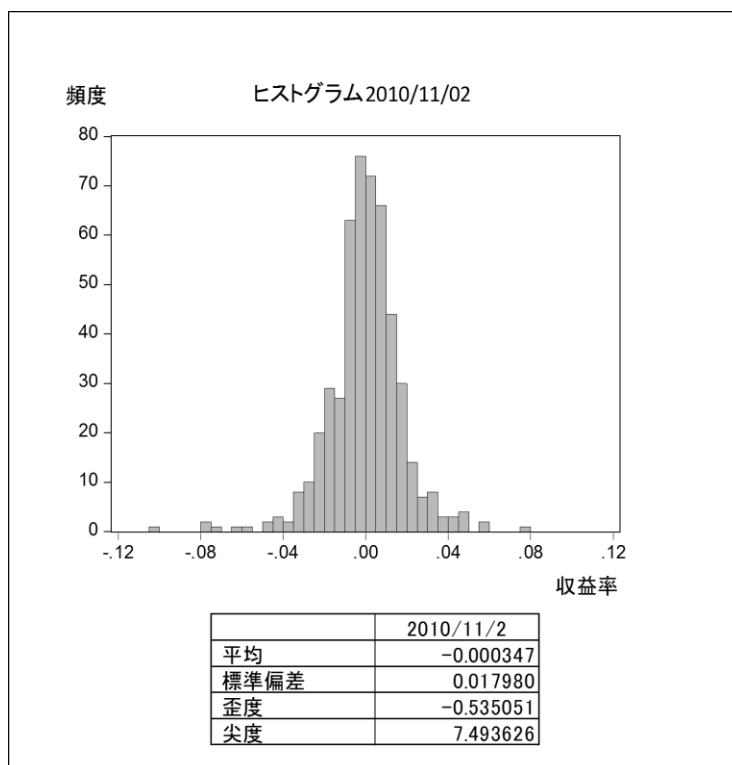
	2011/05/06	2011/05/09	前日差
平均	0.000050	0.000050	0.000000
標準偏差	0.013310	0.013310	0.000000
歪度	-0.959358	-0.959359	-0.000001
尖度	11.927940	11.927950	0.000010

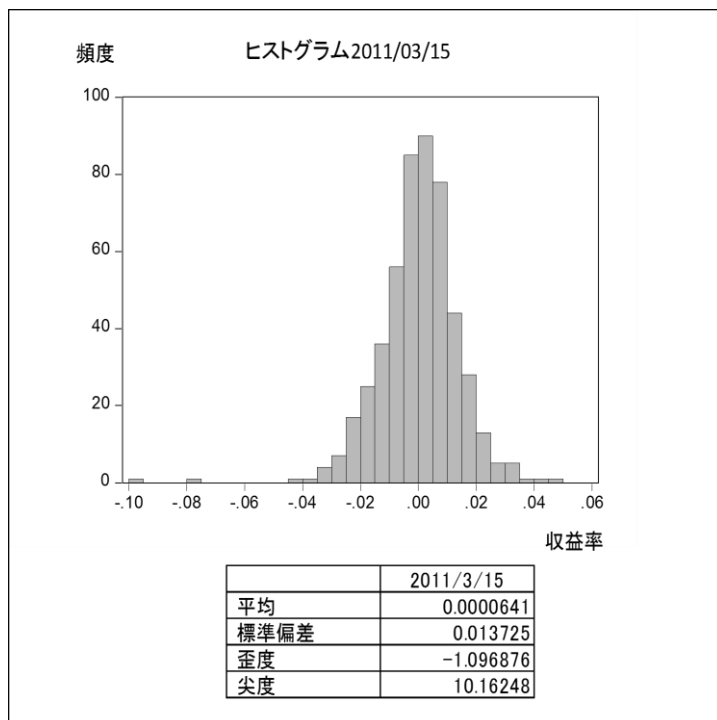
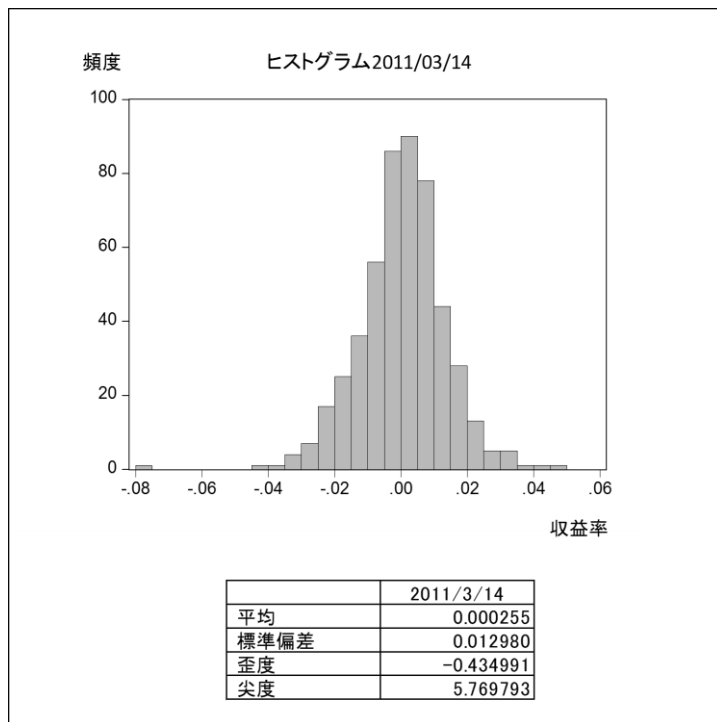
	2011/08/05	2011/08/08	前日差
平均	-0.000237	-0.000293	-0.000056
標準偏差	0.012646	0.012683	0.000037
歪度	-1.131319	-1.119376	0.011943
尖度	13.808250	13.644850	-0.163400

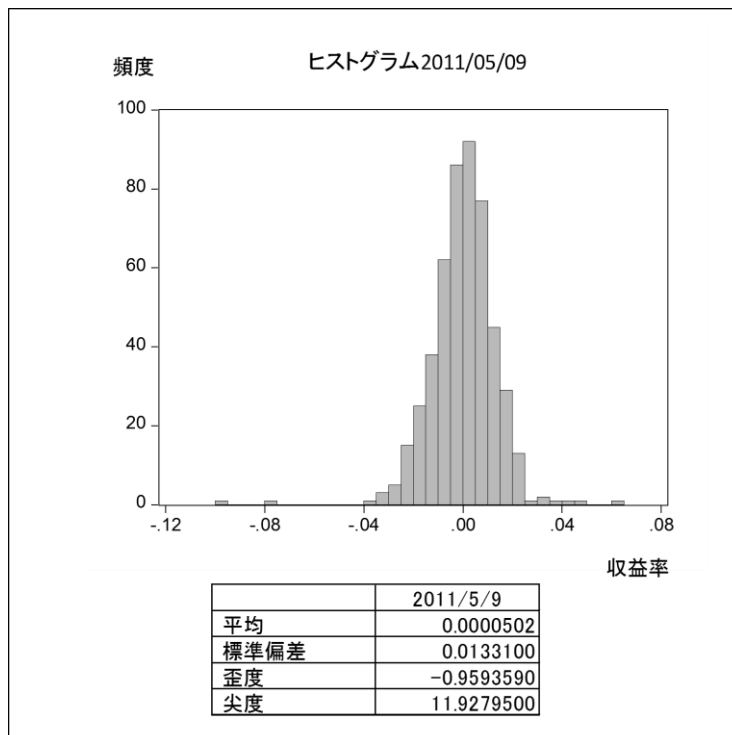
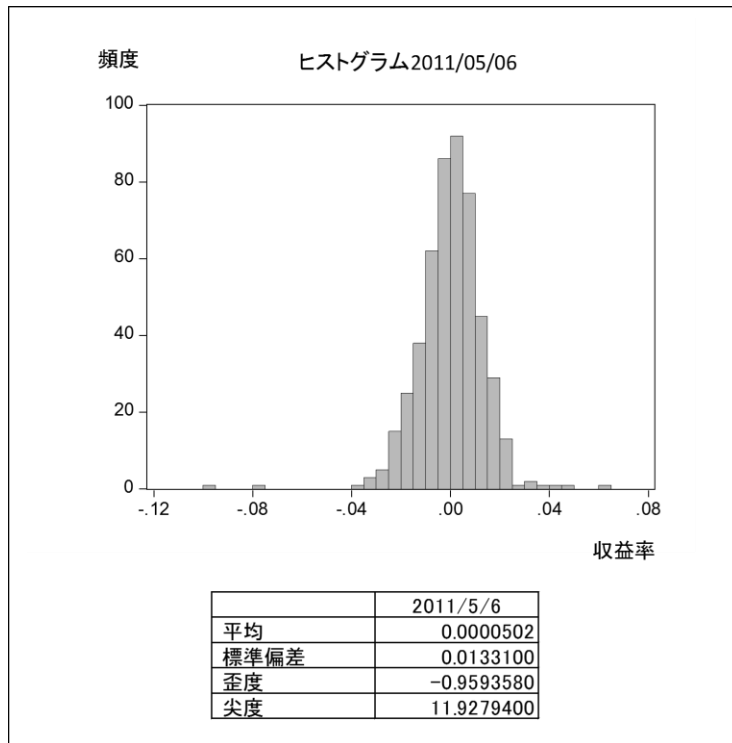
(出所) 観測データより筆者が作成

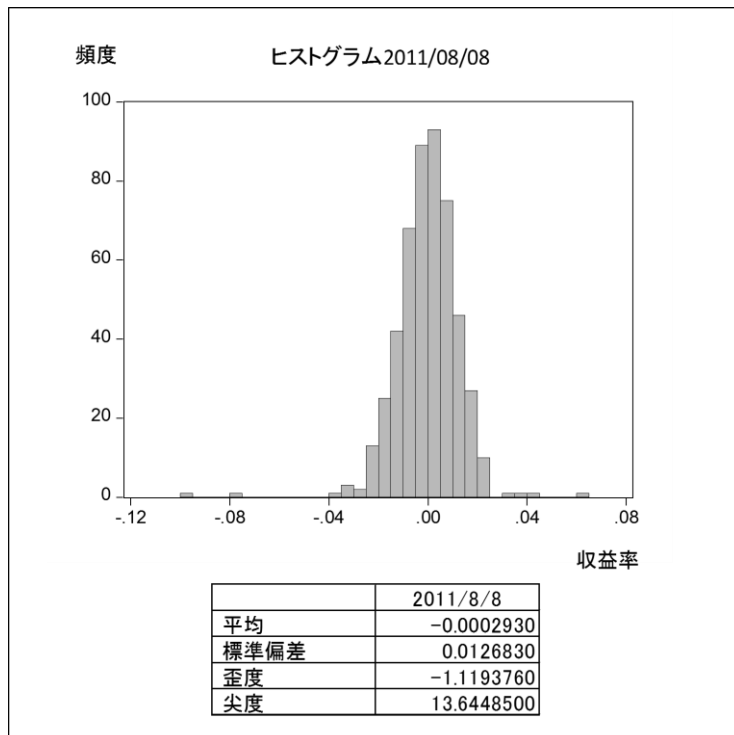
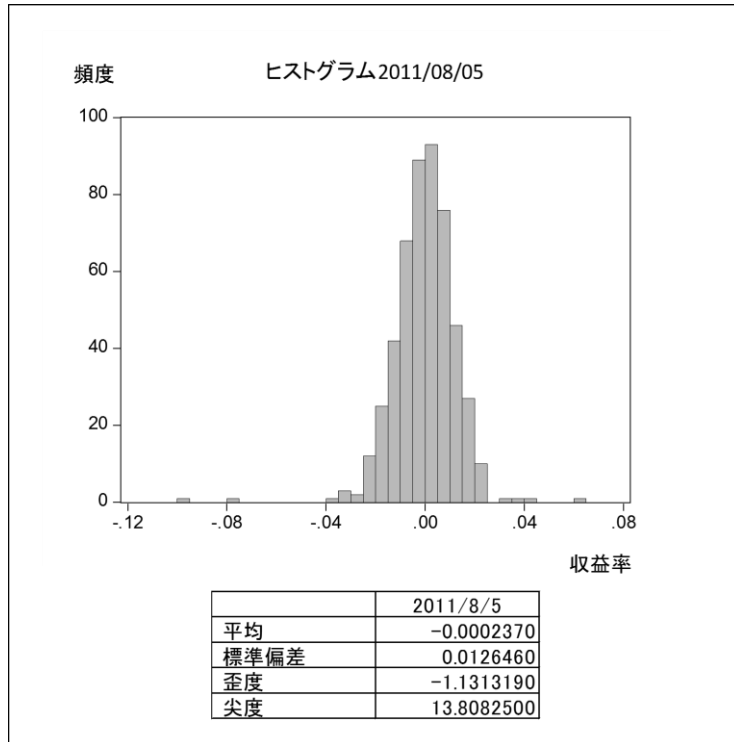
図 2-5 日次収益率の比較 (ヒストグラム)











(出所) 観測データより筆者が作成

2.4 損益の実現値と推定値の比較（バックテスト）

バックテストについては、通常、銀行において Value-at-Risk の検証として実施されている方法を準用し、250日（1年相当）を対象として実施した。観測期間である2010年10月1日から2011年9月30日のうち、直近250日を対象期間とした。また、Normal-VaRのみならず Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR, Johnson-VaR, 5種類すべての Value-at-Risk 推定値のバックテストを実施した。

表 2-4 3ゾーン・アプローチ では超過回数の判定表を示した。この表は250日の観測データの場合であり、二項検定に基づいて累積確率が計算され示されている。

表 2-4 3ゾーン・アプローチ

	超過回数	スケーリング・ファクターの 増分(プラス・ファクター)	累積確率
グリーン・ゾーン	0	0.00	8.11%
	1	0.00	28.58%
	2	0.00	54.32%
	3	0.00	75.81%
	4	0.00	89.22%
イエロー・ゾーン	5	0.40	95.88%
	6	0.50	98.63%
	7	0.65	99.60%
	8	0.75	99.89%
	9	0.85	99.97%
レッド・ゾーン	10以上	1.00	99.99%

注:

上表は、グリーン、イエロー、レッドの各ゾーンを定義したものであり、監督当局はこれに基づいて、マーケット・リスクに対する所要自己資本額を算するために用いられる内部モデル・アプローチに付随する、バックテスト結果について評価することとなる。この表に示された境界線は、250 個の観測データを基準にしたものである。

(出所) Basel Committee on Banking Supervision [1996].

Supervisory framework for the use of “Backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirement

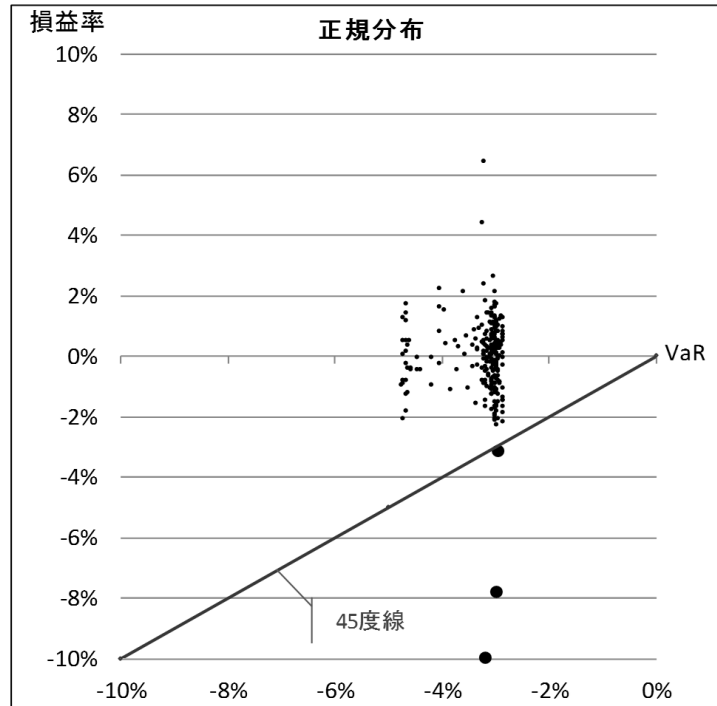
日本銀行仮訳：

「マーケット・リスクに対する所要自己資本額算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテストを利用するための監督上のフレームワーク」

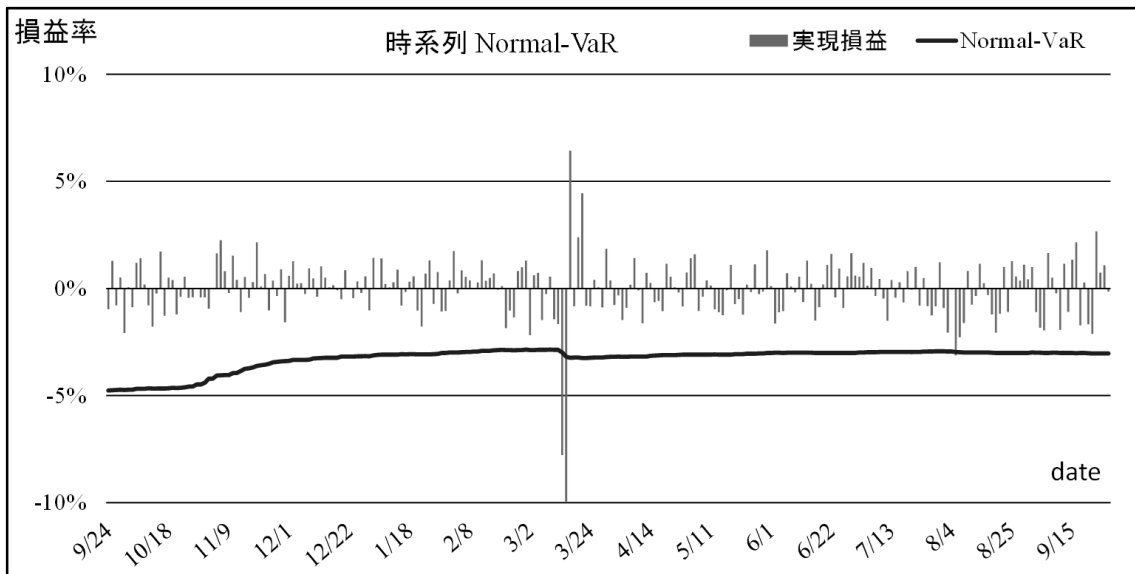
2.4.1 バックテストの手順

- [1] Value-at-Risk は 1 日後の資産のリスク量を推定しているため、その基準日に対応した現実の損益率と比較する。
- [2] 現実の損失率が 250 日のうち、何回、Value-at-Risk 値を超過したか、その回数を計測する。
- [3] 超過回数により、表 2-4 に従い、モデルの精度を判定する。

図 2-6 Normal-VaR のバックテスト結果

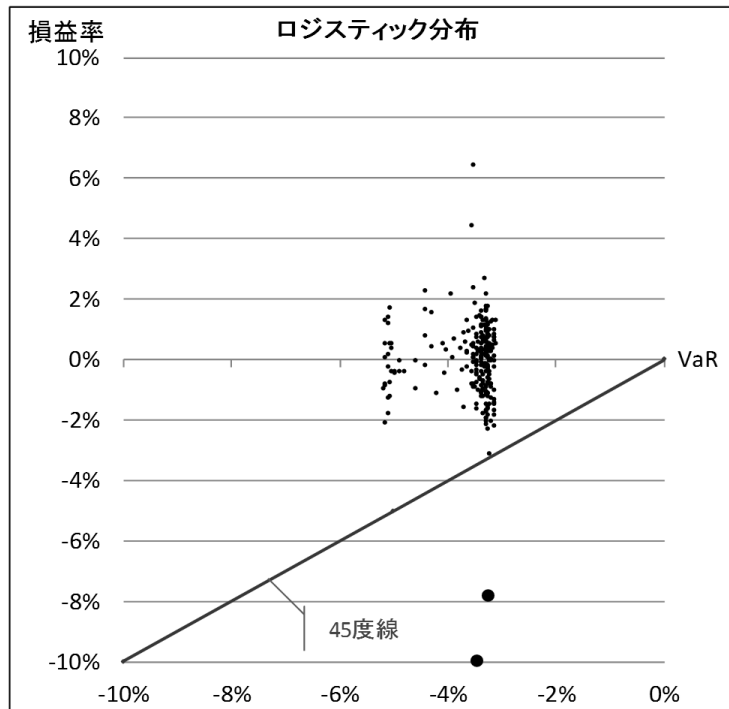


※超過回数は 250 回中，3 回である。
 ※超過日は大きな点で表示している。

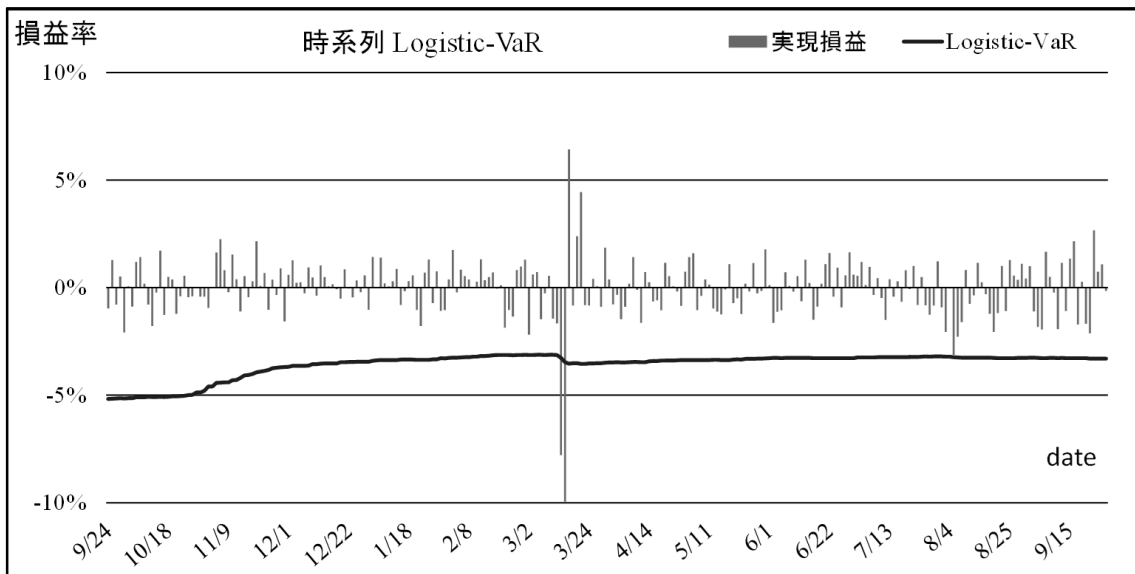


(出所) 筆者作成

図 2-7 Logistic-VaR のバックテスト結果

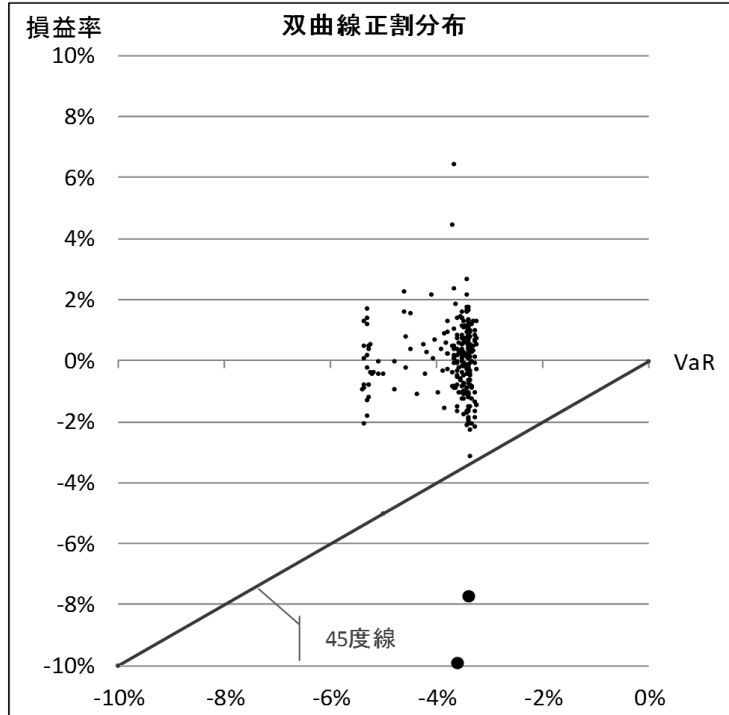


※超過回数は 250 回中，2 回である。
 ※超過日は大きな点で表示している。

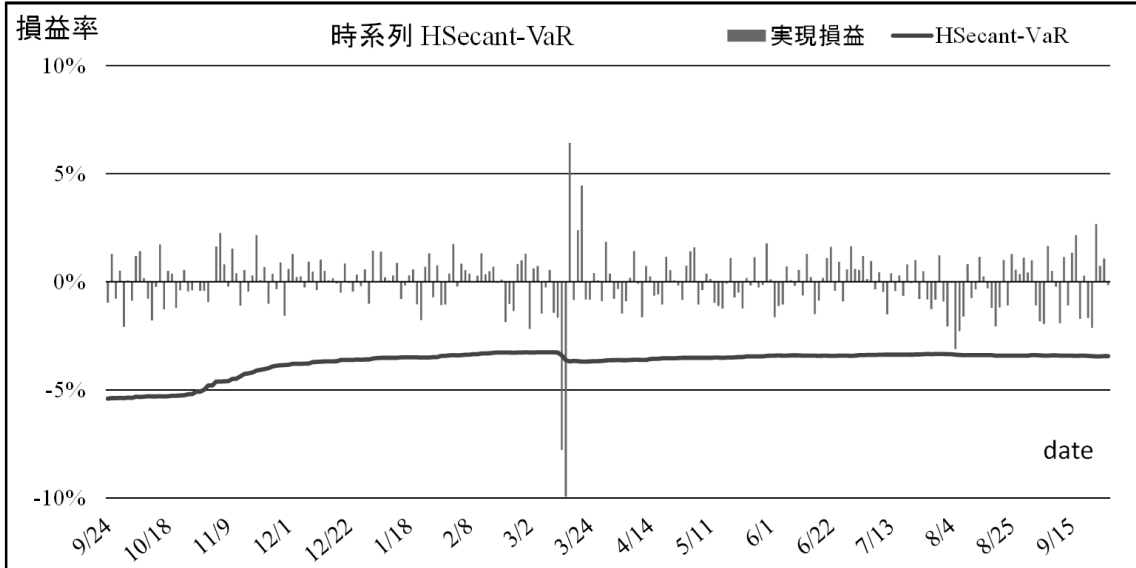


(出所) 筆者作成

図 2-8 HSecant-VaR のバックテスト結果

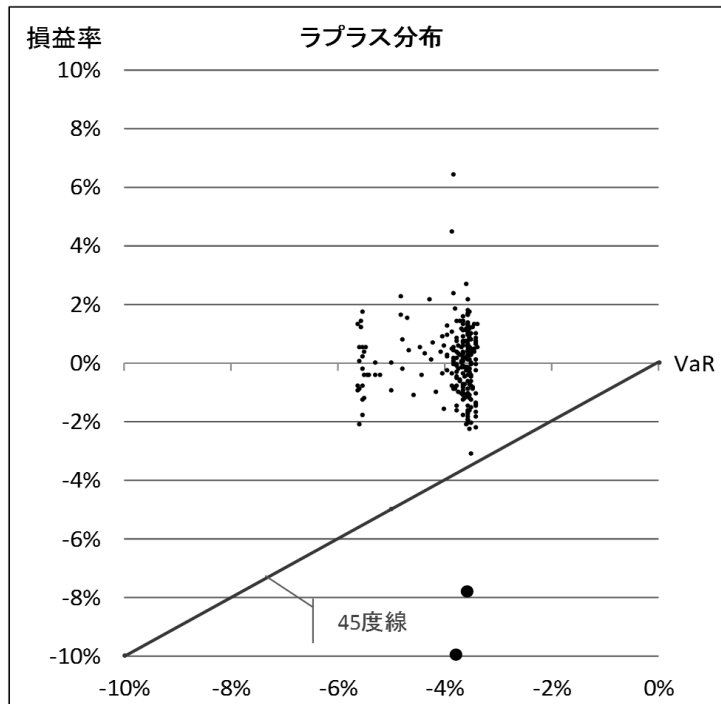


※超過回数は 250 回中, 2 回である.
 ※超過日は大きな点で表示している.

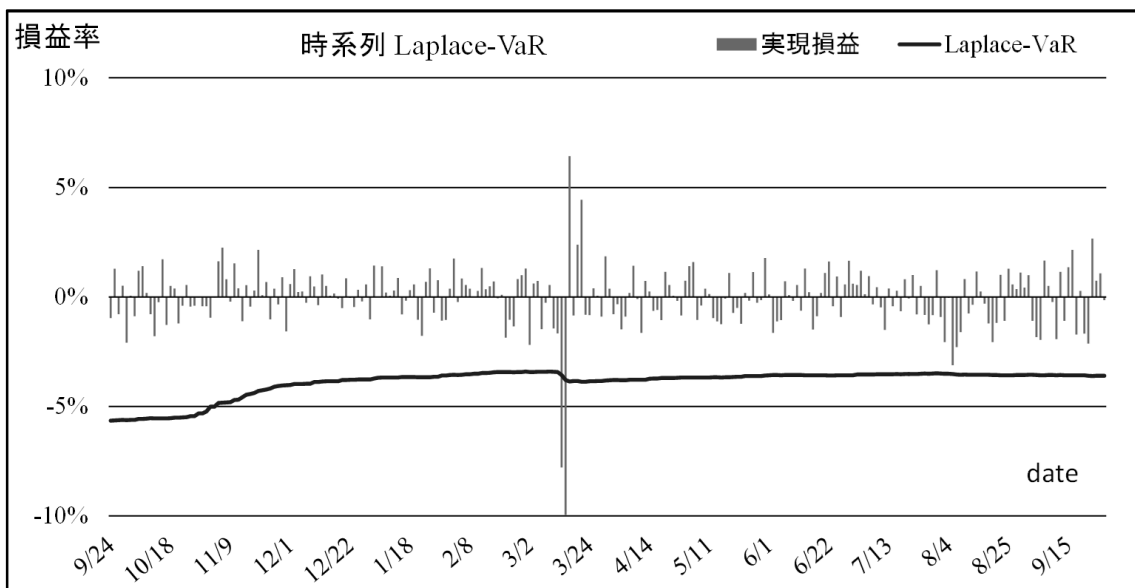


(出所) 筆者作成

図 2-9 Laplace-VaR のバックテスト結果

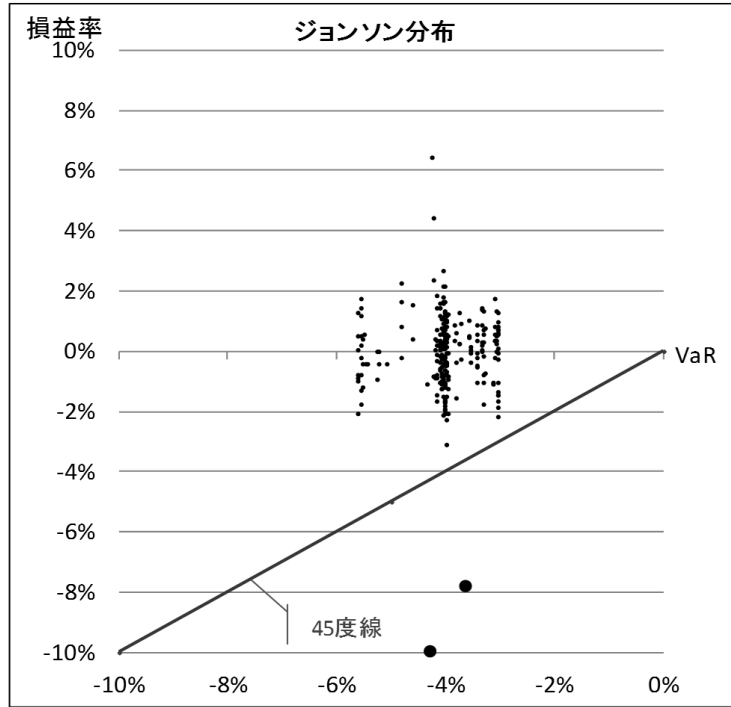


※超過回数は 250 回中，2 回である。
 ※超過日は大きな点で表示している。

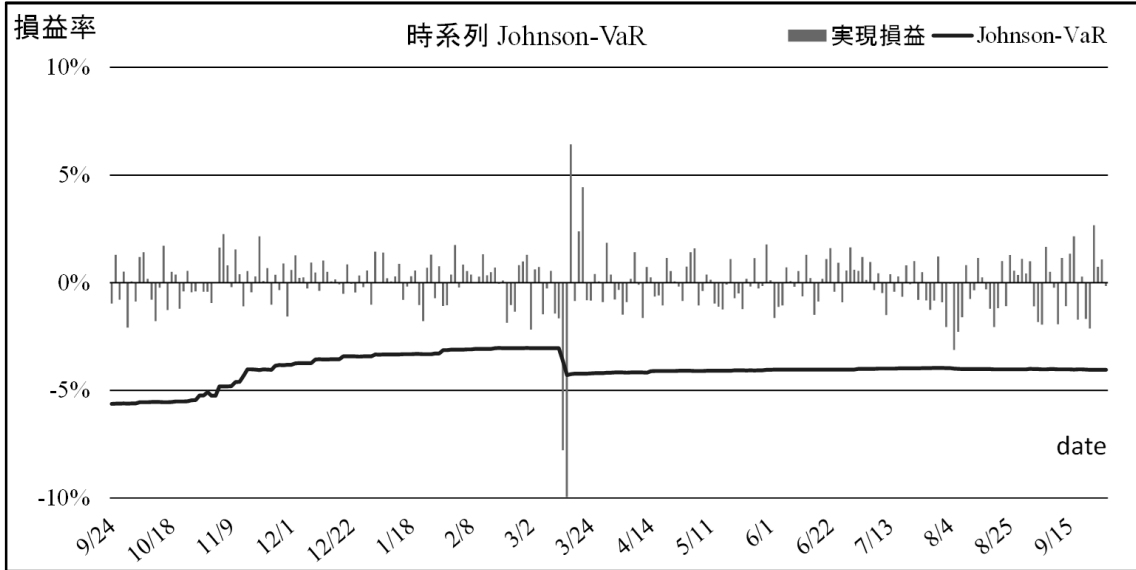


(出所) 筆者作成

図 2-10 Johnson-VaR のバックテスト結果



※超過回数は 250 回中，2 回である。
 ※超過日は大きな点で表示している。



(出所) 筆者作成

2.4.2 バックテストの分析結果

[1] Normal-VaR では超過回数は3回となった。

[2] Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR と Johnson-VaR では超過回数は2回となった。

すべての分布で超過した2回は2011年3月14日と3月15日であり、東日本大震災直後の2日間となった。3月14日の実現した損失率は-0.0778、3月15日の実現した損失率は-0.0995であり、ともに極端に大きな損失となった。前日までの観測データでは予測不可能という判断になる。

ネックとなった観測日は2011年8月5日である。すべてのValue-at-Riskで境界となる4回に至っていないので、バックテストの意図からして問題とはならないが、いずれでも同じという判断は好ましくない。ここでは保守的な評価を重視して、超過回数が少なかったLogistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR, Johnson-VaRの方がNormal-VaRより、運用上望ましいと判断した。

表 2-5 バックテストの結果

分布	超過回数
正規分布	3
ロジスティック分布	2
双曲線正割分布	2
ラプラス分布	2
ジョンソン分布	2
(参考)	
ヒストリカル法	3

(出所) 筆者作成

表 2-7 では参考としてヒストリカル法におけるバックテスト結果を示している。超過回数は3回となっており、Normal-VaRと同様、境界データ(2011年8月5日)で超過となっている。

2.5 考察

ジョンソン SU 分布を仮定した Value-at-Risk 推定値を活用した新たな分析手法により、歪度及び尖度が Johnson-VaR に与える影響を考察した。また、複数の非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定を実施して、この推定結果から複数の非正規分布の関係性を分析した。

第一に、採用した非正規分布の 1 つであるジョンソン SU 分布を仮定した Johnson-VaR は、安定期には他の 3 分布とほぼ同様な動きをするが、変動期には独自の推移を示すことが確認できた。すなわち、Normal-VaR 等はプラス変動もマイナス変動も同様に変動と認識するため、プラス変動の場合、標準偏差の変化として反映され、微小な変動として反応を示している。一方、Johnson-VaR では歪度と尖度もパラメータになるため、歪度と尖度がプラス変動を吸収しており、ほとんど Johnson-VaR には変動が見られず横ばいとなり、数日後に初めて急激な変動が発生するという事象が現れている。結果として Johnson-VaR の推移は階段状の形状となっている。

変動期へ移行するタイミングは、この Johnson-VaR の推移が急激な変動になることで確認できる。他の非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定と同様に Johnson-VaR そのものを直接的に 1 つの Value-at-Risk 推定として使用することに加え、分析のための手段、あるいはリスク計量のベンチマークとして Johnson-VaR を活用する方法を提案する。

「1 時点における 4 つの統計量の分析」では、3moment-VaR の導入により、歪度が Johnson-VaR に与える影響度及び尖度が Johnson-VaR に与える影響度を近似的に識別している。また、Skewness 比率及び Kurtosis 比率を計算することで異なる観測日との比較がしやすくなり、日々モニタリングすることにより Normal-VaR 等（他の 3 つの非正規分布 VaR を含む）の推移分析に役立てることができる。

第二に、複数の非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定において、パラメータが同一（平均、標準偏差）である Logstic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR は、Normal-VaR とほぼ比例関係を保持したまま推移していることを確認している。この非正規分布間の特性を活用し、2.3.2 4 分布の比例関係の考察 で示したように仮定する確率分布を変更す

ることにより、リスクレベルを上下にシフトさせるという概念を提案する。この概念の導入によりリスクの過小評価を回避させることができるものと考えている。

最後にバーゼル銀行監督委員会が 1996 年にトレーディング勘定のバックテストイン
グのフレームワークとして規定した方法を準用して、5 分布 VaR すべてに対してバック
テストを実施した。それぞれの確率分布により結果の違いは予想された通りであるが、
結果だけにとらわれることなく、少なくとも 1 つ以上の異なる確率分布との比較分析が
必要である。バックテストの結果としては Logistic-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR と
Johnson-VaR では超過回数は 2 回となり、正規分布（超過回数 3 回）との対比の観点か
らこの 4 分布の適用は望ましいと判断でき、正規分布を仮定した Normal-VaR を適用す
ることは望ましくない。

-
- ¹ 日本銀行金融機構局[2011]の pp.9-10. を参照.
- ² 定常性の仮定の問題に対しては、ストレステストを始め、観測期間の短縮化とデータの重み付け、さらにモデル化（ボラティリティや相関が時間とともに変化するという性質をモデル化する）による対応がある。ファットテイル性の問題に対処するための方策としてヒストリカル・シミュレーション法の適用が知られており、また正規性の緩和（ファットテイルな分布として解釈する）もある。リスクファクター相互の相関構造の把握への対処法としては分散共分散法があるが、分散共分散法では不十分であることが問題になっている。ヒストリカル・シミュレーション法でも相関構造がモデルに内包されているという判断もあろうが、内包されているだけで相関構造そのものの把握はできているかどうか判別しにくい。テイルリスクの問題に対しては、一般的には Expected Short-fall (ES：期待ショートフォール, Conditional-VaR とも言う) がある。Value-at-Risk を超過する値の平均と定義される。
- ³ ロジスティック分布では、歪度=0, 尖度=4.2 となる。
双曲線正割分布では、歪度=0, 尖度=5 となる。
ラプラス分布では、歪度=0, 尖度=6 となる。
- ⁴ モーメント（積率）とは、確率変数のべき乗に対する期待値で与えられる特性値である。簡単に示すと原点まわりの1次モーメントは期待値を指し、平均まわりの2次モーメントは分散を指す。平均まわりの3次モーメントは歪度の計算に用いられ、平均まわりの4次モーメントは尖度の計算に用いられる。一般化すると確率変数 X の k 次モーメントという言い方をする。ここでは数学的には少し正確性に欠けるが、簡略的に“3moment-VaR”と呼んでいる。
- ⁵ Kurtosis 比率については対象期間の数値を検証してみたが、最大値 0.014%, 最小値 -0.018%となり、範囲がとても小さくなることがわかった。尖度の分析については Kurtosis 比率を比較検証するより、尖度そのものの変動を比較する方がわかりやすいため、本章では尖度の変動を分析対象としている。

Appendix A : ジョンソン SU 分布のパラメータについて

ジョンソン SU 分布におけるパラメータ変動の、4 つの統計量に対する影響度合いを示しておく。表 A-1~A-4 すべてにおいて、横に並んだ 5 つの表のうち、中央に位置する表を基本形 (Gamma: $\gamma=1.0$, Delta: $\delta=4.0$, Lambda: $\lambda=3.0$, Xi: $\xi=0.9$) としている。右に行くほど変化させるパラメータの値が大きくなっており、左に行くほどパラメータの値が小さくなっていく。なお、わかりやすくするため 99%分位点はそのまマイナス表記している。

表 A-1 Gamma の変化

パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ	
Gamma	-2.0	Gamma	-1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.5	Gamma	2.0
Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0
Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0
Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9
理論値		理論値		理論値		理論値		理論値	
平均	2.513	平均	1.682	平均	0.118	平均	-0.288	平均	-0.713
標準偏差	0.876	標準偏差	0.799	標準偏差	0.799	標準偏差	0.831	標準偏差	0.876
歪度	0.367	歪度	0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.285	歪度	-0.367
尖度	0.457	尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.385	尖度	0.457
99%分位点	0.655	99%分位点	-0.113	99%分位点	-1.892	99%分位点	-2.428	99%分位点	-3.015

(出所) 筆者作成

Gamma の値が大きくなると平均と歪度は小さくなり、標準偏差は大きくなる。逆に、Gamma の値が小さくなると平均と歪度は大きくなり、標準偏差は小さくなる。しかも、歪度と尖度については符号が変化しても、その絶対値は変わらない。99%分位点については、Gamma の値が大きくなると小さくなり、Gamma の値が小さくなると大きくなる。

表 A-2 Delta の変化

パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ	
Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0
Delta	2.0	Delta	3.0	Delta	4.0	Delta	5.0	Delta	6.0
Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0
Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9
理論値		理論値		理論値		理論値		理論値	
平均	-0.871	平均	-0.177	平均	0.118	平均	0.284	平均	0.391
標準偏差	1.952	標準偏差	1.121	標準偏差	0.799	標準偏差	0.625	標準偏差	0.514
歪度	-0.874	歪度	-0.358	歪度	-0.195	歪度	-0.123	歪度	-0.085
尖度	2.587	尖度	0.703	尖度	0.327	尖度	0.190	尖度	0.126
99%分位点	-6.730	99%分位点	-3.151	99%分位点	-1.892	99%分位点	-1.246	99%分位点	-0.850

(出所) 筆者作成

Delta の値が大きくなると平均と歪度も大きくなり, 標準偏差と尖度は小さくなる. 逆に Delta の値が小さくなると平均と歪度も小さくなり, 標準偏差と尖度は大きくなる. 99%分位点については, Delta の値が大きくなると大きくなり, Delta の値が小さくなると小さくなる.

表 A-3 Lambda の変化

パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ	
Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0
Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0
Lambda	1.0	Lambda	2.0	Lambda	3.0	Lambda	4.0	Lambda	5.0
Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9	Xi	0.9
理論値		理論値		理論値		理論値		理論値	
平均	0.639	平均	0.379	平均	0.118	平均	-0.143	平均	-0.403
標準偏差	0.266	標準偏差	0.533	標準偏差	0.799	標準偏差	1.065	標準偏差	1.332
歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195
尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327
99%分位点	-0.031	99%分位点	-0.962	99%分位点	-1.892	99%分位点	-2.823	99%分位点	-3.754

(出所) 筆者作成

Lambda の値が大きくなると平均は小さくなり, 標準偏差は大きくなる. 遂に, Lambda の値が小さくなると平均は大きくなり, 標準偏差は小さくなる. しかし, 歪度と尖度は, Lambda の値の変動に左右されず一定となる. 99%分位点については, Lambda の値が大きくなると小さくなり, Lambda の値が小さくなると大きくなる.

表 A-4 Xi の変化

パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ		パラメータ	
Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0	Gamma	1.0
Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0	Delta	4.0
Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0	Lambda	3.0
Xi	-1.1	Xi	-0.1	Xi	0.9	Xi	1.9	Xi	2.9
理論値		理論値		理論値		理論値		理論値	
平均	-1.882	平均	-0.882	平均	0.118	平均	1.118	平均	2.118
標準偏差	0.799	標準偏差	0.799	標準偏差	0.799	標準偏差	0.799	標準偏差	0.799
歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195	歪度	-0.195
尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327	尖度	0.327
99%分位点	-3.892	99%分位点	-2.892	99%分位点	-1.892	99%分位点	-0.892	99%分位点	0.108

(出所) 筆者作成

Xi の値が大きくなると平均は大きくなる。逆に、Xi の値が小さくなると平均は小さくなる。しかし、標準偏差・歪度・尖度は Xi の値の変動に左右されず一定となる。99%分位点については、Xi の値が大きくなると大きくなり、Xi の値が小さくなると小さくなる。

Appendix B : 3 moment-VaR について

ジョンソン SU 分布において、4 つの統計量（平均、標準偏差、歪度、尖度）のうち、歪度を 0 に固定させて統計量（平均、標準偏差、尖度）を 3 つにして Value-at-Risk を推定したケースが 3moment-VaR である。2.3.1 1 時点における 4 つの統計量の分析、手順 4 で述べた説明を再掲する。

「Normal-VaR と Johnson-VaR の差は、歪度と尖度、2 つのパラメータの影響度を示している。Normal-VaR と 3 moment-VaR の差は、尖度の Johnson-VaR への影響度を示しており、3moment-VaR と Johnson-VaR の差は、歪度の Johnson-VaR への影響度を示している。」

Normal-VaR と Johnson-VaR の差は、歪度と尖度の影響度である。解析的に歪度の影響だけを計算できないため、あるいは解析的に尖度の影響だけを計算できないため、近似値を推定する手段として 3 moment-VaR を定義したものである。

3 moment-VaR の特徴は、 $\gamma=0$, $\text{Xi}=0$ となることであり、このことにより平均=0, 歪度=0 となり¹, 不変である。つまり係数として変化するのは、標準偏差と尖度だけとなる。形状の特徴としては平均 : 0 を中心として左右対称となることである。

以下に、Delta と Lambda を変化させて標準偏差と尖度の変動の表を示した。ここでのシミュレーション数値は現実の観測期間から判断して起こりうる数値を当てはめた。

結果としては、Delta と Lambda が小さくなると標準偏差と尖度は大きくなり 99% 分位点は小さくなる。Delta と Lambda が大きくなると標準偏差と尖度は小さくなり 99%分位点は大きくなる。

¹ 蓑谷[2010]. p363.を参照.

表 B-1 3moment-VaR のシミュレーション

パラメータ	パラメータ	パラメータ	パラメータ	パラメータ	パラメータ
Gamma	0	0	0	0	0
Delta	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
Lambda	0.012	0.016	0.020	0.024	0.028
Xi	0	0	0	0	0
理論値	理論値	理論値	理論値	理論値	理論値
平均	0	0	0	0	0
標準偏差	0.0147	0.0123	0.0114	0.0109	0.0107
歪度	0	0	0	0	0
尖度	10.552	3.070	1.508	0.916	0.623
99%分位点	-4.083%	-3.237%	-2.888%	-2.708%	-2.603%

(出所) 筆者作成

Appendix C : 追加分析について

第2章本文では、リーマン・ショックの影響が抜け落ちる時期と東日本大震災の影響が出る時期を評価期間とした。そこでリスクレベルが上昇する時期の分析としてリーマン・ショックの影響が出る期間の分析を追加的に実施した。方法は第2章本文とほぼ同じ方法により、「1時点における4つの統計量分析」を実施しており、ここでは「バックテスト」については実施していない。なお、評価期間は2008年9月1日より2008年12月30日の81日間とした。

図 C-1 から図 C-3 までは「Value-at-Risk 推定の結果分析」として、5 確率分布、3moment-VaR とヒストリカル法の図を示している。また、表 C-1 では Skewness 比率と Kurtosis 比率の結果を示している。

1. Value-at-Risk 推定の結果分析

図 C-1 Value-at-Risk 推定結果（5 確率分布）より視覚的にわかった事項を示す。

Johnson-VaR については、「安定期-前半」では正規分布による推定値よりも値が大きくなっているが、他の確率分布の推定値とほぼ同様に推移している。「変動期」ではイベント日（2008年10月8日と2008年10月16日）には大きく変動している。この原因は、他の確率分布ではパラメータとなっていない歪度及び尖度の変動による影響であることがわかる。また、Johnson-VaR では、2008年10月14日だけ下落するという事象が発生しており、他の確率分布とは明らかに異なる推移を示している。他の正規分布及び非正規分布では徐々に値が大きくなっていくが、Johnson-VaR はジャンプしながら上昇しており、上記で示した下落も交えて階段状に上昇するという現象が見られた。「安定期-後半」では他の確率分布とほぼ同様な推移となり、11月5日以降は Laplace-VaR とほぼ同じレベル（5.5~5.8%）で推移していく。

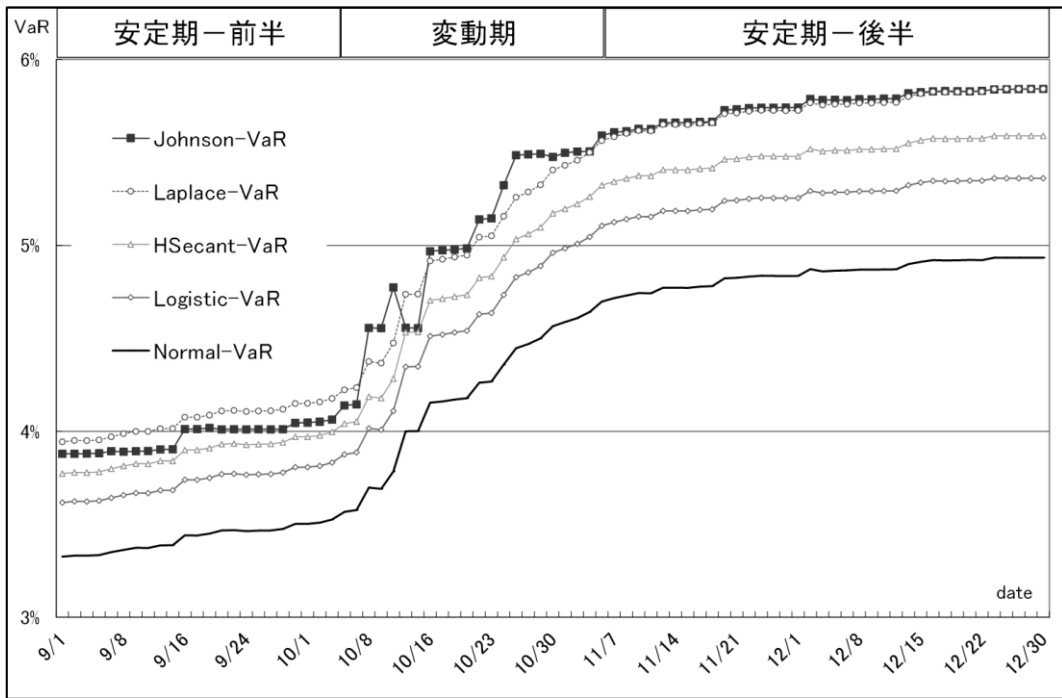
さらに、Normal-VaR と Logistic-VaR と HS-VaR と Laplace-VaR は、4 分布ともパラメータが平均と標準偏差であるため比例関係を保持している。各 Value-at-Risk 推定値が比例的に推移しており、それぞれの推移水準が逆転する見込みはないと予想できる。概して第2章本文の分析と同様な結果となっていることが示された。

歪度の符号が反転する事象は4か月のうち2回となり、2008年10月14日とその直後の2008年10月16日となった。2008年10月14日は大きなプラス変動（+12.86%）が生じた観測日であり、Normal-VaRを含めて他のすべてが上昇している中、Johnson-VaRでは大きな下落となった。一方、2008年10月16日はJohnson-VaRでは最大の上昇（+0.413%）となった。

次に図 C-2 Value-at-Risk 推定結果（3moment-VaR）では、3moment-VaRはNormal-VaRを増幅させたような推移となっており、イベント日である2008年10月8日から11月5日までの間はJohnson-VaRとは異なる推移を示している。3moment-VaRもNormal-VaR同様、対称分布であることが原因と考えられ、2008年10月14日には大きなプラス変動を受けて最大の上昇（+0.5%）となっている。「安定期-後半」においても3moment-VaRはJohnson-VaRより値は小さくなるが、正規分布からは大きく乖離してJohnson-VaRに近づいている。

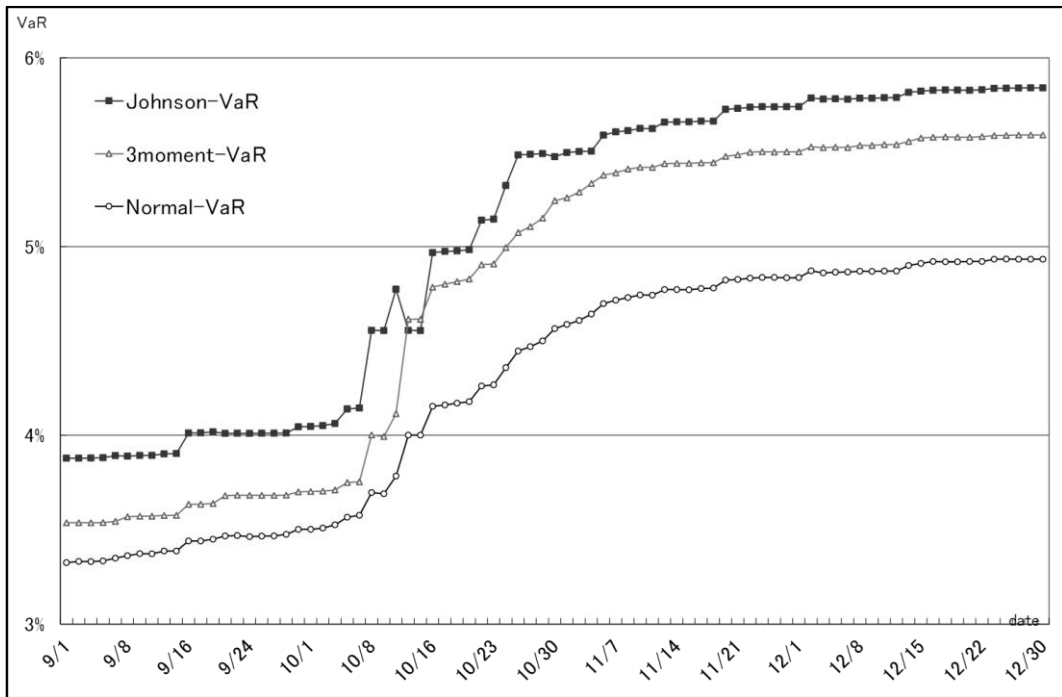
最後に図 C-3 Value-at-Risk 推定結果（ヒストリカル法）では、最も値が小さくなるNormal-VaRと、最も値が大きくなるLaplace-VaRの推移を示し、ヒストリカル法の結果と対比させた。ヒストリカル法では2008年9月1日時点で4.1%であったものが、2段階の上昇を経て2008年12月30日時点では7.3%まで上昇している。

図 C-1 Value-at-Risk 推定結果 (5 確率分布)



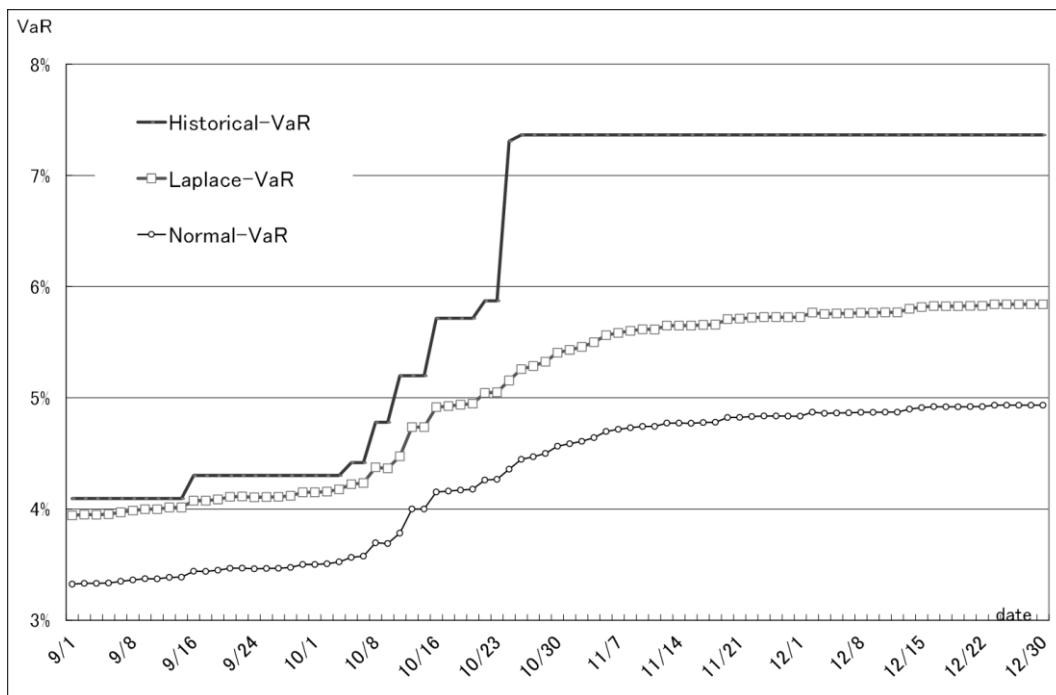
(出所) 筆者作成

図 C-2 Value-at-Risk 推定結果 (3moment-VaR)



(出所) 筆者作成

図 C-3 Value-at-Risk 推定結果 (ヒストリカル法)



(出所) 筆者作成

2. 1 時点における 4 つの統計量の分析

第 2 章本文と同様、1 時点における 4 つの統計量の分析を実施して、結果を表 C-1 Skewness 比率と Kurtosis 比率の分析 に示した。評価期間である 2008 年 9 月 1 日より 12 月 30 日のうち、Johnson-VaR の前日差（上昇）の大きい観測日を 5 個抽出している。

Johnson-VaR の前日差で 1 番大きな変動を示したのは 2008 年 10 月 16 日であり、その前日差は+0.413%となっている。原因となるのは、標準偏差の変動が+0.000575 と最も大きいことが挙げられ、尖度も+0.649 であり大きな変動といえる。さらに歪度についても符号が反転する観測日となっており、Skewness 比率の前日差も大きな変動となっている。つまり、2008 年 10 月 16 日の観測データは-10.0%であり、標準偏差・尖度・歪度の 3 つの統計量に大きな変動を生じさせるだけのインパクトの強いイベントであったことを示している。

2 番目に大きな変動となったのは 2008 年 10 月 8 日であり、Johnson-VaR の前日差は+0.412%となっている。原因となるのは、標準偏差の変動が+0.000450 とやはり 2 番目に大きいことが挙げられ、尖度の変動に至っては+1.181 となり最も大きな変動といえる。2008 年 10 月 16 日の観測データは-8.38%であり、2008 年 10 月 16 日に次ぐ大きな変動であったことが原因となっている。

3 番目に大きな変動となったのは 2008 年 10 月 10 日であり、その前日差は+0.219%となっている。原因となるのは、標準偏差の変動が+0.000334 と大きいことが挙げられ、尖度の変動も+0.433 となり 3 番目に大きな変動である。2008 年 10 月 10 日の観測データは-7.36%であり、大きな変動であったことが原因となっている。

こうしてみると、リスクレベル高騰局面では計測基準日の観測データを観察することが重要であることがわかる。観測データ値そのものはもちろんのこと観測分布の特性値である統計量の変動もまた重要となろう。リスク量計測の元になる、これらの基礎数値を分析することで精緻な予測まではできないかもしれないが、観測データ推移の方向性を捉えることは可能となろう。そのときにジョンソン SU 分布を仮定した Johnson-VaR をベンチマークとして活用する方法は有効に機能することが期待できる。

表 C-1 Skewness 比率と Kurtosis 比率の分析

	10/07	10/08	10/09	10/10	10/15	10/16
平均	-0.000934	-0.001089	-0.001128	-0.001290	-0.001062	-0.001253
標準偏差	0.014972	0.015422	0.015376	0.015710	0.016742	0.017317
(前日差)		0.000450		0.000334		0.000575
歪度	-0.371	-0.621	-0.630	-0.757	0.271	-0.097
(前日差)		-0.250		-0.127		-0.368
尖度	4.198	5.379	5.415	5.849	11.804	12.453
(前日差)		1.181		0.433		0.649
Normal-VaR	3.576%	3.697%	3.690%	3.784%	4.001%	4.154%
Johnson-VaR	4.144%	4.556%	4.555%	4.774%	4.555%	4.968%
(前日差)		0.412%		0.219%		0.413%
3moment-VaR	3.753%	4.002%	3.993%	4.115%	4.615%	4.785%
歪度の影響	0.391%	0.554%	0.561%	0.659%	-0.059%	0.183%
尖度の影響	0.177%	0.305%	0.303%	0.331%	0.613%	0.631%
歪度尖度の影響	0.567%	0.859%	0.864%	0.990%	0.554%	0.813%
Skewness比率	-1.053%	-0.892%	-0.891%	-0.870%	-0.220%	-1.884%
(前日差)		0.161%		0.021%		-1.664%
Kurtosis比率	0.042%	0.057%	0.056%	0.057%	0.052%	0.051%
(前日差)		0.015%		0.001%		-0.001%

	10/21	10/22	10/24	10/27
平均	-0.001071	-0.001218	-0.001388	-0.001560
標準偏差	0.017500	0.017793	0.018139	0.018445
(前日差)		0.000294		0.000306
歪度	-0.080	-0.184	-0.301	-0.396
(前日差)		-0.104		-0.095
尖度	12.039	11.795	11.563	11.364
(前日差)		-0.243		-0.200
Normal-VaR	4.178%	4.261%	4.359%	4.447%
Johnson-VaR	4.984%	5.140%	5.324%	5.485%
(前日差)		0.156%		0.161%
3moment-VaR	4.828%	4.904%	4.995%	5.075%
歪度の影響	0.156%	0.236%	0.329%	0.410%
尖度の影響	0.649%	0.642%	0.635%	0.627%
歪度尖度の影響	0.805%	0.878%	0.964%	1.037%
Skewness比率	-1.953%	-1.281%	-1.091%	-1.035%
(前日差)		0.672%		0.056%
Kurtosis比率	0.054%	0.054%	0.055%	0.055%
(前日差)		0.001%		0.000%

(出所) 筆者作成

第3章 収益率の観測分布の適合度

3.1 はじめに

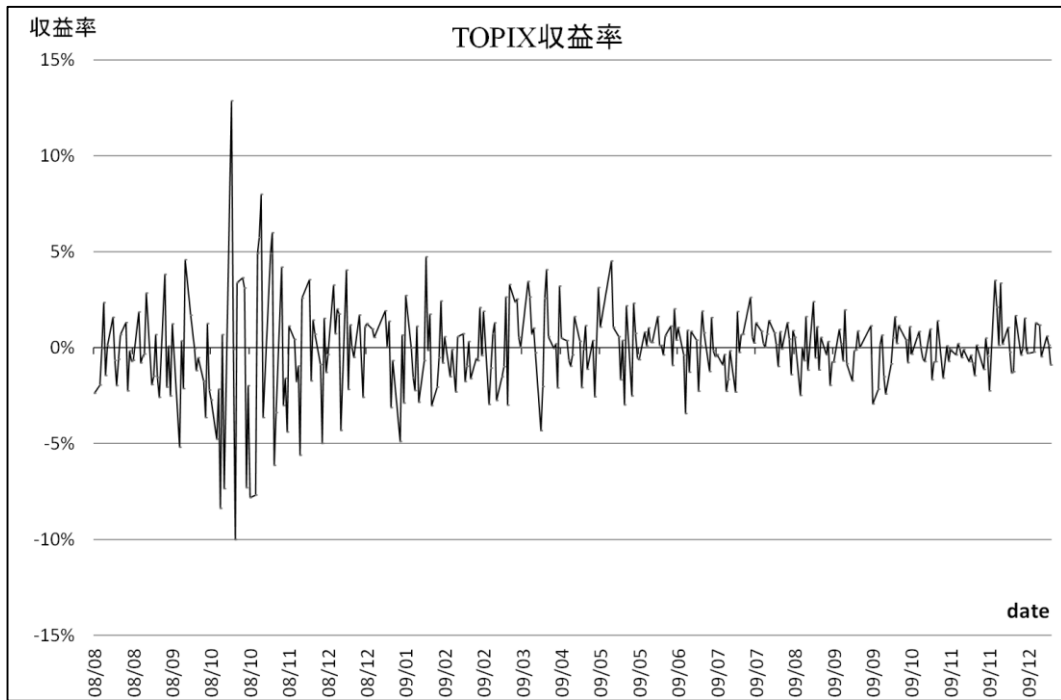
本章の目的は、Value-at-Risk 推定に利用される観測データそのものを分析することで、その観測分布の特性を捉えることにより観測データに適合する確率分布を識別することにある。基準日時点の損失率の観測分布に適合する非正規分布を仮定することで、一律に正規分布を仮定する現行手法が持つ弊害を取り除く方法を考察する。

リスク計測を実施するに当たり、収益率・損失率の観測データそのものが持つ特性の重要性を忘れてはならないのは当たり前である。一般的に金融データは正規分布ではなくファットテイル¹となると言われているが、果たしてそうであるか否かを検証する。

図 3-1 TOPIX 収益率の推移では、2008 年 9 月に起きたリーマン・ショック以降の TOPIX 収益率の推移を示している。図を見ればわかるように、2008 年 9 月から 12 月までの 3 か月間は大きな変動が多く含まれていることが認められるが、リーマン・ショックというイベントの前後はどうだったのだろうか。

少なくとも図 3-1 を見る限り、リーマン・ショック直後の大きな変動が含まれる期間のあと、2009 年 1 月以降、収益率の変動はあまり小さくなく、2009 年後半では比較的変動が小さい、安定した期間となっていることが見てとれる。

図 3-1 TOPIX 収益率の推移
(2008 年 8 月～2009 年 12 月)



(出所) 東京証券取引所

Value-at-Risk 推定にあたり観測データの分布にファットテイル性の問題が存在しないに越したことはない。しかしながら、収益率・損失率の観測分布は正規分布ではなくファットテイルとなる時期があることも事実である。こうした時期に正規分布を適用していることに問題はないだろうか。またそれとともに、「正規性がある時期も存在する」ことを再確認していく。この時期があるからこそ正規分布を仮定しているわけであり、まさしく正規分布適用の一義的な根拠となっている。

ファットテイル性を特に注視しなければならない時期は、このケースではリーマン・ショックというイベント発生後の約 1 か月間と予想できる。我が国においてもリーマン・ショックの影響は非常に大きく、少なくともこの時期の観測データを利用してリスクレベルが急激に増大していく過程を分析する必要がある。そこでファットテイルの存在を注視しなければならない 1 か月間については、ファットテイル性の問題を加味した総合的な判断を重視した推定方法を検討する。その 1 つの方法として流動性リスク管理では定番である「リスクフェーズ区分」を設定する方法を提案する。損失率の観測データを多面的に分析することで、少なくとも一律に正規分布を仮定する既存の方法よりも、現実の損失率の観測分布に適合した確率分布を当てはめて推定する方法の方が良いことを示す。次節でも述べるが、ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法は、ヒストリカル法の 1 つとして捉えられるものの、通常のヒストリカル・シミュレーション法とは明確に区別する。

本章では第 2 章と同様に、正規分布をはじめロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布に加えジョンソン SU 分布の適合性を検証して、リスクフェーズ区分に適合した確率分布を選定する概念を考察する。

本章の構成は以下のとおりである。3.2 節では、Value-at-Risk 推定におけるパラメータや前提を決める。3.3 節では、収益率分布の適合度分析として様々な検定を実施しその結果を述べる。3.4 節では、リスク計測における「リスクフェーズ区分」の必要性を考察し、分析結果を踏まえ推定した Value-at-Risk 値の比較分析を実施する。最後に 3.5 節で論点をまとめる。

3.2 Value-at-Risk 推定の前提条件

Value-at-Risk 推定を行う上で、必要なパラメータや前提を決定しておく。保有期間は 1 日とし、信頼水準は一般的に使われている 99%とする。前提としてリスクファクターは株式指数のみを採用する。その他の前提として Value-at-Risk 推定に当たり変化率は対数損失率²とする。その他の分析については収益率をベースとしている。観測期間は 251 日（1 年相当）³とし、観測期間として算出した損失率データは、2008 年 8 月 1 日より 2009 年 12 月 30 日までとする。Yahoo ファイナンスから取得した TOPIX（終値）より日次損失率を算出している。評価期間として「リーマン・ショックの影響が反映される時期」と「リーマン・ショックの影響が反映される観測データが除外されていく時期」の 2 期間に分ける。前者の評価期間として、2008 年 9 月から 11 月の 3 か月間を選定し、後者の評価期間として、2009 年 10 月から 12 月の 3 か月間を選定する。

次に、正規分布に対する比較対象とすべき非正規分布として、ロジスティック分布、双曲線正割分布及びラプラス分布を採用する。3 分布共にパラメータは正規分布と同じく位置と尺度であり、歪度と尖度は平均と標準偏差の値に関係なく一定の値を採ることがわかっている⁴。各分布におけるパラメータについてはモーメント法により推定している。さらに、正規分布の進化系としてのジョンソン SU 分布（以下、ジョンソン分布）を採用した。正規分布のパラメータは平均と標準偏差の 2 つであるが、一方、ジョンソン分布では平均・標準偏差・歪度・尖度の 4 つのパラメータが必要となり、パラメータが 2 つ増えることにより正規分布や他の非正規分布より現実の損失率分布に近似することが期待できる。ジョンソン SU 分布のパラメータ推定については Tuenter [2001]の方法に依っている。

Value-at-Risk 推定手法については、ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を採用する。この手法は損益ベースで特定の確率分布を仮定する無条件モデルであり、とても計算が簡単で、しかも計算負荷が小さいというメリットがある。

ヒストリカル・シミュレーション法では、計測基準日のエクスポージャーを一定と仮定してリスクファクター変動の過去データを適用することでシミュレーションしており、そのシミュレート後の損失率分布を利用して順序統計の概念に基づいて分位点を推定する。

一方、経験損失分布に1変量パラメトリック分布を当てはめる方法では、計測基準日における経験損失分布をもとに損益ベースで特定の確率分布を仮定するプロセスが加わり、数値解析的に分位点を推定する。ともにヒストリカルなデータを重視してシミュレーションするという点では概念的には近いものである。

3.3 収益率分布の適合度分析

日々の現実の収益率分布が仮定した確率分布に対してどの程度適合しているものなのか、あるいは適合していないものなのか、を確率分布の左端だけを取り出して観察し検証する。ここでは現実の収益率分布における99%分位点⁵が、仮定した収益率分布における99%分位点を超過していないことをもって、ファットテイル性の問題に抵触しないことを確認するものとする。ここまです「収益率の観測分布の左端の分析」と呼び、文字通り収益率の観測分布の左端における特性を把握することを目的としている。

次に、これ以降を「収益率の観測分布全体の分析」とし、仮定した確率分布全体が現実の収益率の観測分布に適合しているかを仮説検定の手順に従って判断する。仮説検定では、第一段階としては正規性の検定⁶を実施して正規性の可否を確認する。第二段階として適合性の検定により、仮定した確率分布に対する適合度を確認する。正規性の検定では、シャピロ-ウィルク検定⁷、アンダーソン-ダーリング検定⁸、ジャルク-ベラ検定⁹及びダゴスティーノ-ピアソン検定¹⁰の4つの検定を採用する。一方、適合性の検定では1標本コルモゴロフ-スミルノフ検定を採用する。

3.3.1 適合度分析の方法

「収益率の観測分布の左端の分析」及び「収益率の観測分布全体の分析」の範囲は、リーマン・ショックの影響が反映される時期として、2008年9月12日から始まる3日間、2008年10月14日から始まる3日間、2008年10月30日から始まる3日間、2008年11月18日から始まる3日間を抽出する。この時期では2008年10月14日がイベント発生日となり、これ以降の期間ではリスクレベルが急激に増大していくことが予想される。一方、リーマン・ショックの影響が反映される観測データが観測期間から除外されていく時期として、2009年10月5日から始まる3日間、2009年10月26日から始まる3日間、2009年11月12日から始まる3日間、2009年12月22日から始まる3日間を抽出する。

本節においては、損失率分布ではなく収益率分布で表示している。理由として累積確率を表示するときに小さい値から累積させていく都合上、損失率分布ではわかりやすく表示できないためである。また、通常ファットテイルは正規分布と比較して裾が厚い分布を指しているが、本章では正規分布にとどまらず「仮定する非正規分布」まで拡大している。すなわち、予測値の分位点が現実の観測値の分位点を捉えていない事象についても広義の「ファットテイル性の問題」としている。

3.3.2 ファットテイル性の判定

「リーマン・ショックの影響が反映される時期」、つまりリスクレベル高騰局面の代表的な観測データとして、2008年9月12日、2008年10月14日、2008年10月30日、2008年11月18日の4日間の収益率の累積分布の左裾の状況を図により示し、仮定した確率分布が累積確率0.01（1%）の点で現実の収益率分布の左裾を捉えているか否かを確認する。

図3-2 2008年9月12日の比較においては、正規分布とジョンソン分布では現実の収益率分布の左裾を捉えておらず、ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布では現実の収益率分布の左裾を捉えている。つまり、ファットテイル性という観点からはロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布が適合していると判断できる。次に、2008年10月14日の比較においては、ラプラス分布では現実の収益率分布の左

裾を捉えており、正規分布とロジスティック分布とジョンソン分布では、現実の収益率分布の左裾を捉えていない。前段と同様に、ファットテイル性という観点からはラプラス分布だけが適合している。

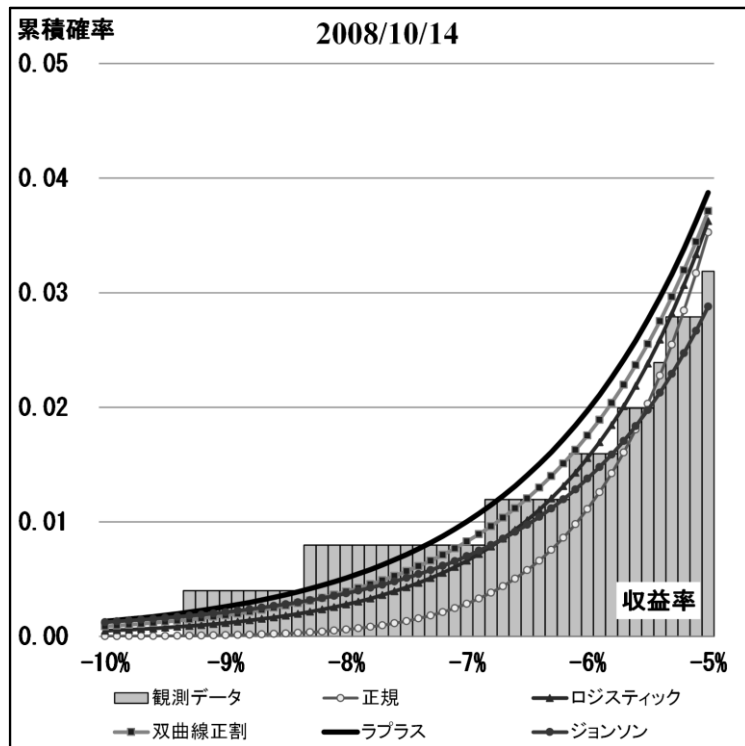
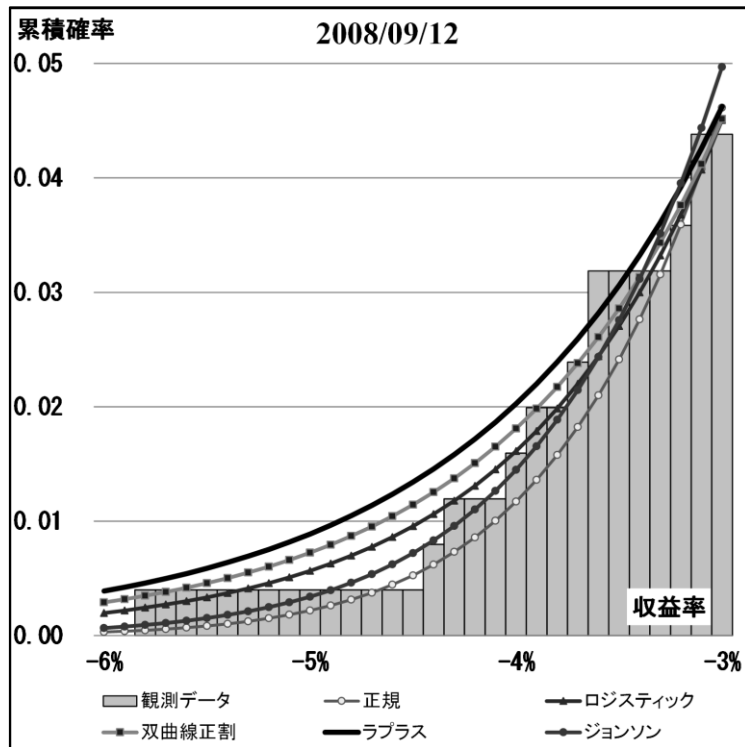
図 3-3 2008 年 10 月 30 日と 2008 年 11 月 18 日の比較においては、すべての仮定した確率分布は現実の収益率分布の左裾を捉えておらず、ファットテイルという観点からはすべての確率分布において適合していない。

例として 2008 年 9 月 12 日を選定し、詳細を述べる。

最上位にあるラプラス分布の累積分布を確認すると、縦軸である累積確率において 0.01 (1%) の横線とラプラス分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過していない。2 番目となる双曲線正割分布の累積分布を確認すると、同様に 0.01 の横線と双曲線正割分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過していない。3 番目となるロジスティック分布の累積分布を確認すると、同様に 0.01 の横線とロジスティック分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過していない。以上より、ラプラス分布・双曲線正割分布・ロジスティック分布の 3 分布については、ファットテイル性の問題に抵触しないことがわかる。次に 4 番目となるジョンソン分布の累積分布を確認すると、0.01 (1%) の横線とジョンソン分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過している。最下位にある正規分布の累積分布を確認すると、0.01 の横線と正規分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過している。以上により、ジョンソン分布・正規分布の 2 分布については、ファットテイル性の問題に抵触することがわかる。

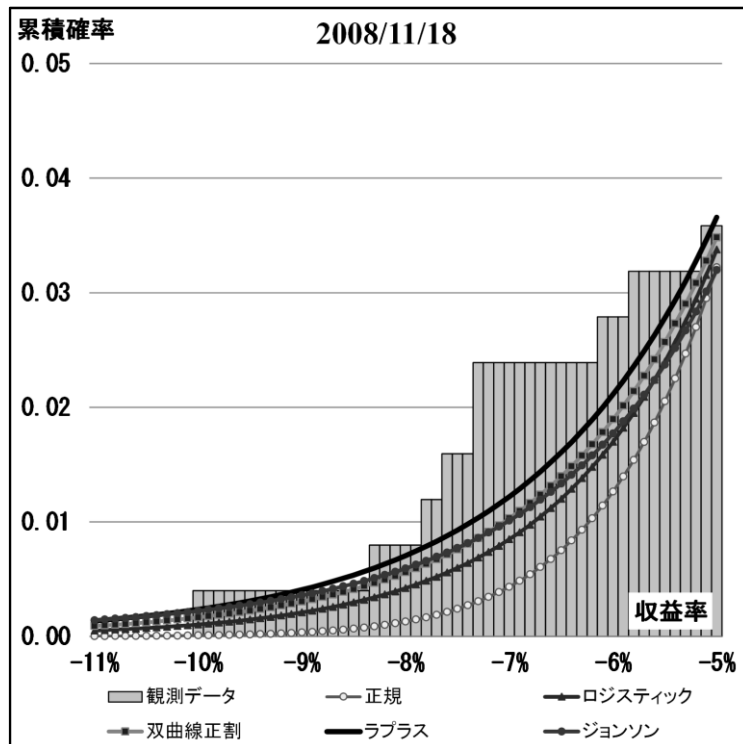
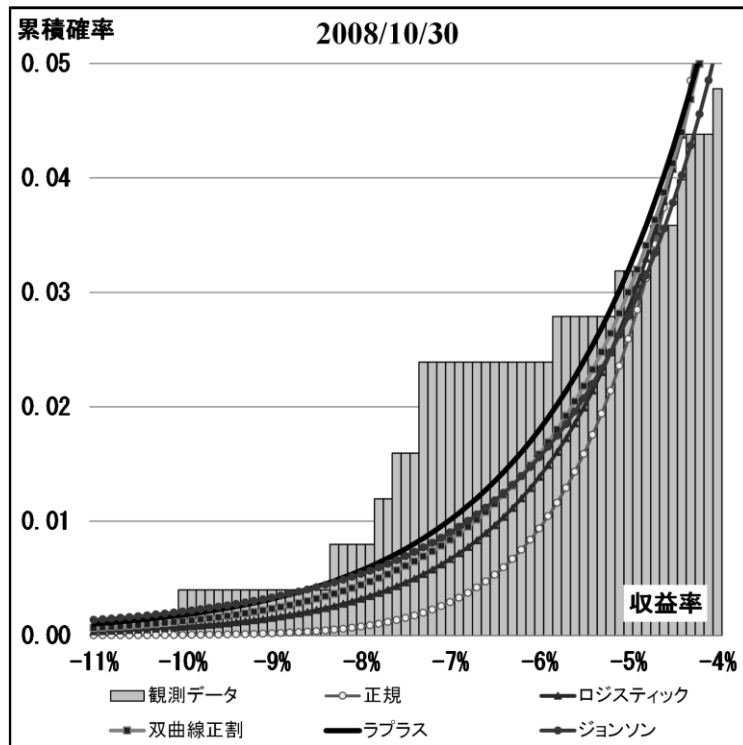
さらに、表 3-1 ファットテイル性の判定の根拠数値では、上記の結果を数値比較で確認できる。絶対値で表記すると、観測値 0.043 に対し、ラプラス分布 0.048、双曲線正割分布 0.046、ロジスティック分布 0.044 となり、3 分布すべてにおいて「○：ファットテイル性の問題はない」となる。一方、観測値 0.043 に対しジョンソン分布 0.042、正規分布 0.040 となり、「FT：ファットテイル性の問題がある」と表記される。つまり、ジョンソン分布と正規分布ではファットテイル性の問題に抵触することがわかる。

図 3-2 左裾の比較 (2008年9月12日・10月14日)



(出所) 筆者作成

図 3-3 左裾の比較 (2008年10月30日・11月18日)



(出所) 筆者作成

※ 2008年10月30日・11月18日では、仮定した分布関数が共に現実の収益率分布の左裾を捉えていないことが明らかにわかるので根拠数値の表は省略している。

表 3-1 ファットテイル性の判定の根拠数値（2008 年 9 月・10 月）

- : ファットテイル性の問題はない（現実の収益率分布の左裾を捉えている）
 FT : ファットテイル性の問題がある（現実の収益率分布の左裾を捉えていない）
 △ : ほぼ同程度

2008/09/12	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.043	-0.048	-0.046	-0.044	-0.042	-0.040
判定		○	○	○	FT	FT
2008/09/16	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.044	-0.049	-0.047	-0.045	-0.044	-0.041
判定		○	○	○	△	FT
2008/09/17	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.044	-0.049	-0.047	-0.045	-0.044	-0.041
判定		○	○	○	△	FT

2008/10/14	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.058	-0.059	-0.057	-0.055	-0.054	-0.050
判定		○	FT	FT	FT	FT
2008/10/15	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.058	-0.059	-0.057	-0.055	-0.054	-0.050
判定		○	FT	FT	FT	FT
2008/10/16	観測データ	ラプラス	ジョンソン	双曲線正割	ロジスティック	正規分布
99%分位点	-0.073	-0.062	-0.060	-0.060	-0.057	-0.053
判定		FT	FT	FT	FT	FT

（出所）筆者作成

※ 観測データの 99%分位点が、仮定した収益率分布における 99%分位点を超過していないことをもって、ファットテイル性の問題に抵触しないことを確認した。

※絶対値における比較となる。|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点|

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| > 0 の時、○

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| < 0 の時、FT

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| = 0 の時¹¹、△

としている。

同様にして、「リーマン・ショックの影響が反映される観測データが除外されていく時期」、つまりリスクレベル低下局面の代表的なデータとして、2009年10月5日、2009年10月26日、2009年11月12日、2009年12月22日の4日間の確率分布の左裾の状況を図により示し、仮定した確率分布が、累積確率0.01（1%）の点で現実の収益率分布の左裾を捉えているか否かを確認する。

2009年10月5日、2009年10月26日の比較図においては、すべての仮定した確率分布は現実の収益率分布の左裾を捉えておらず、ファットテイルという観点からはすべての確率分布において適合していない。現実の収益率分布（「観測データ」と表記）においては、 $-0.08 \sim -0.06$ という大きな変動が観測期間に残っていることが原因となっている。

2009年11月12日の比較図においては、正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布とジョンソン分布では現実の収益率分布の左裾を捉えておらず、ラプラス分布だけが現実の収益率分布の左裾を捉えている。つまりファットテイルという観点からはラプラス分布が適合している。

2009年12月22日の比較図においても、正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布とジョンソン分布では現実の収益率分布の左裾を捉えておらず、ラプラス分布だけがほぼ同程度となり現実の収益率分布の左裾を捉えている。前段同様に、ファットテイルという観点からはラプラス分布が適合している。

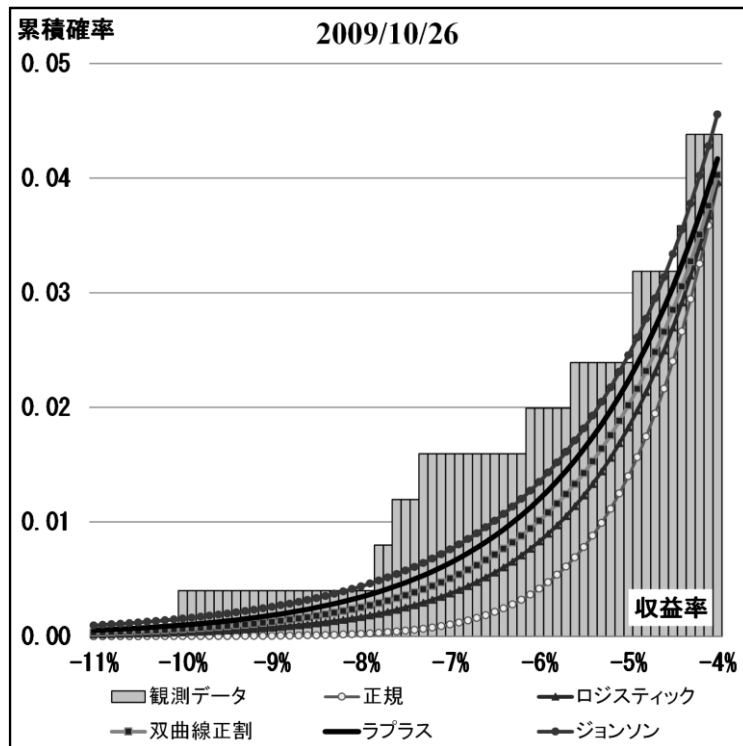
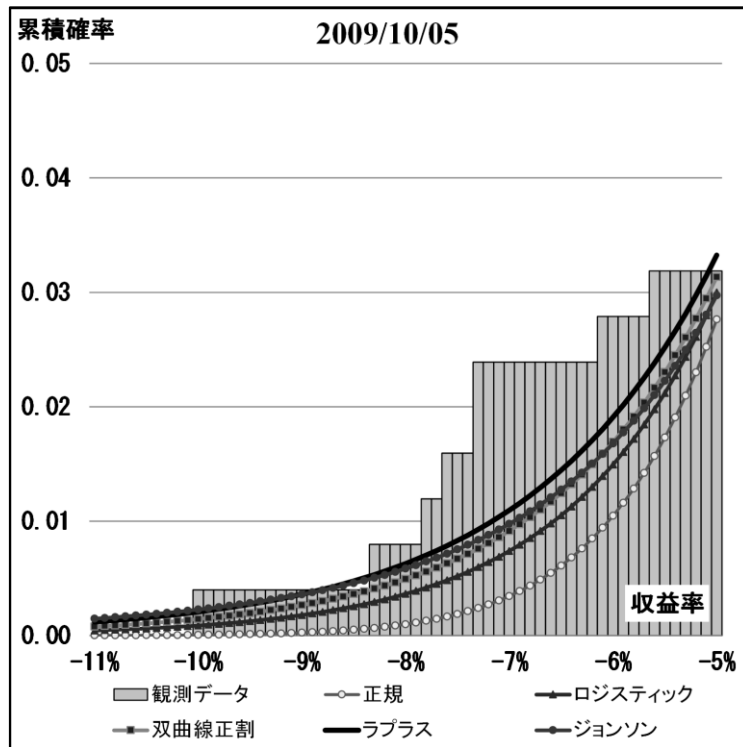
例として2009年12月22日を選定し、詳細を述べる。

最上位にあるラプラス分布の累積分布を確認すると、縦軸である累積確率において0.01（1%）の横線とラプラス分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は0.01とほぼ重なっている。以上より、ラプラス分布については、観測データとほぼ同等であり、ファットテイル性の問題に抵触しないと見做せる。2番目となる双曲線正割分布の累積分布を確認すると、同様に0.01の横線と双曲線正割分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は0.01を超過している。3番目となるロジスティック分布の累積分布を確認すると、同様に0.01の横線とロジスティック分布関数が交差する点では、

観測データの累積確率は 0.01 を超過している。4 番目となるジョンソン分布の累積分布を確認すると、0.01 (1%) の横線とジョンソン分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過している。最下位にある正規分布の累積分布を確認すると、0.01 の横線と正規分布関数が交差する点では、観測データの累積確率は 0.01 を超過している。以上により、双曲線正割分布・ロジスティック分布・ジョンソン分布・正規分布の 4 分布については、ファットテイル性の問題に抵触することがわかる。

さらに、表 3-2 ファットテイル性の判定の根拠数値では、上記の結果を数値比較で確認できる。絶対値で表記すると、観測値 0.043 に対し、ラプラス分布 0.043 となり、ほぼ同等と見做し「△：ほぼ同程度」となる。一方、観測値 0.043 に対し、双曲線正割分布 0.041、ロジスティック分布 0.039、ジョンソン分布 0.038、正規分布 0.036 となり、「FT：ファットテイル性の問題がある」と表記される。つまり 4 分布すべてファットテイル性の問題に抵触することがわかる。

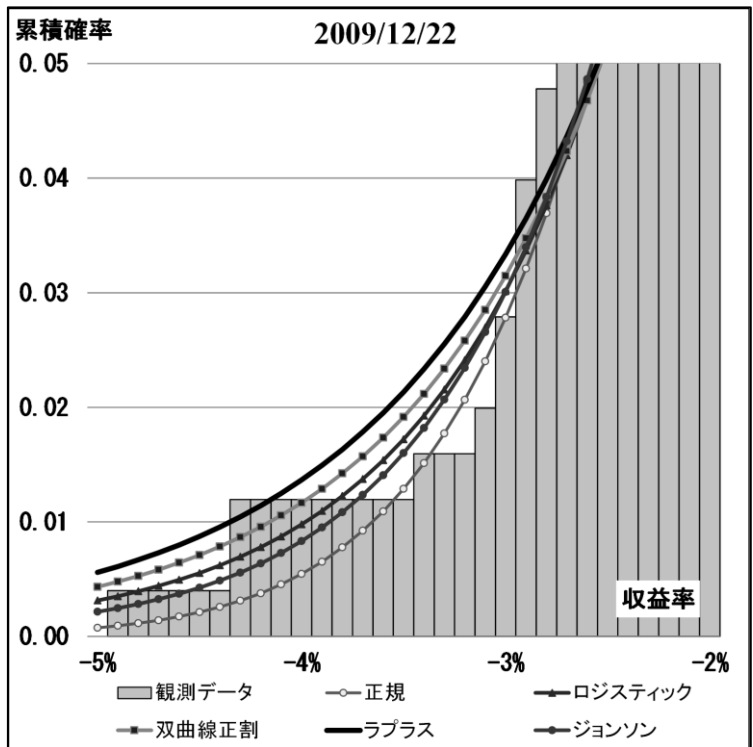
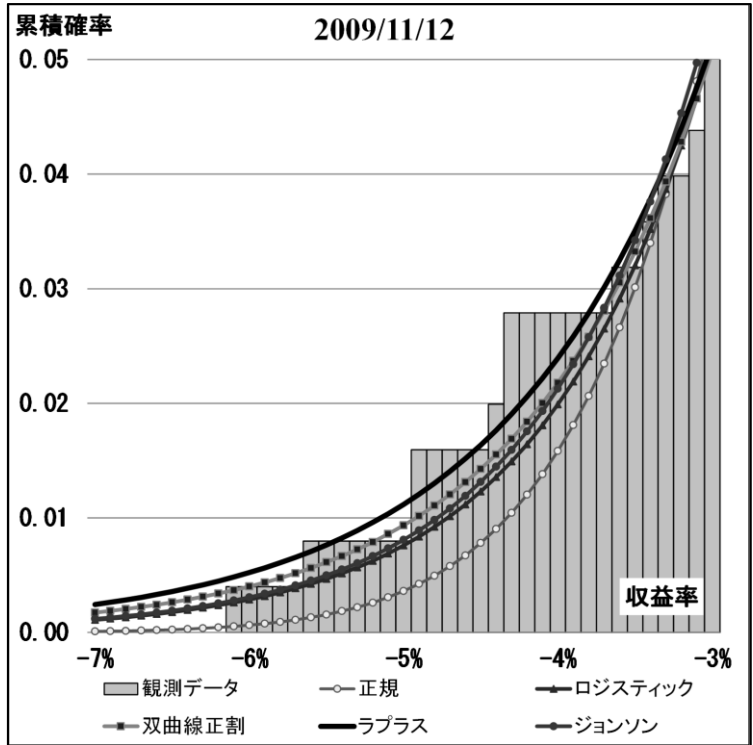
図 3-4 左裾の比較 (2009年10月5日・10月26日)



(出所) 筆者作成

※ 2009年10月5日・10月26日では、仮定した分布関数が共に現実の収益率分布の左裾を捉えていないことが明らかにわかるので根拠数値の表は省略している。

図 3-5 左裾の比較 (11月12日・12月22日)



(出所) 筆者作成

表 3-2 ファットテイル性の判定の根拠数値（2009 年 11 月・12 月）

- ：ファットテイル性の問題はない（現実の収益率分布の左裾を捉えている）
 FT：ファットテイル性の問題がある（現実の収益率分布の左裾を捉えていない）
 △：ほぼ同程度

200911/12	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ジョンソン	ロジスティック	正規分布
99%分位点	-0.049	-0.051	-0.049	-0.047	-0.047	-0.043
判定		○	△	FT	FT	FT
200911/13	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ジョンソン	ロジスティック	正規分布
99%分位点	-0.049	-0.050	-0.048	-0.047	-0.046	-0.042
判定		○	FT	FT	FT	FT
200911/16	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ジョンソン	ロジスティック	正規分布
99%分位点	-0.049	-0.050	-0.048	-0.047	-0.046	-0.042
判定		○	FT	FT	FT	FT
200912/22	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.043	-0.043	-0.041	-0.039	-0.038	-0.036
判定		△	FT	FT	FT	FT
200912/24	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.043	-0.043	-0.041	-0.039	-0.038	-0.036
判定		△	FT	FT	FT	FT
200912/25	観測データ	ラプラス	双曲線正割	ロジスティック	ジョンソン	正規分布
99%分位点	-0.043	-0.043	-0.041	-0.039	-0.038	-0.036
判定		△	FT	FT	FT	FT

（出所）筆者作成

※ 観測データの 99%分位点が、仮定した収益率分布における 99%分位点を超過していないことをもって、ファットテイル性の問題に抵触しないことを確認した。

※ 絶対値における比較となる。|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点|

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| > 0 の時、○

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| < 0 の時、FT

|モデルの 99%分位点| - |観測値の 99%分位点| = 0 の時、△

としている（注 11 を参照）。

「収益率の観測分布の左端の分析」としてファットテイル性の有無を検証した。とはいえ左裾を捉えていない期間が多くなり、確率分布の適合度を測るにはこの分析だけでは十分とはいえない。ファットテイル性は過去データの確率分布の特性の 1 つであり、ファットテイル性そのものを解消することはできない。あくまでもファットテイル性を考慮した推定をすることが目標であるが、このファットテイル性の判定ではファットテイルの程度を把握できることが重要となる。

たとえば「リーマン・ショックの影響が反映される時期」において、ラプラス分布は 5 つの抽出日で左裾を捉えており、有効であると判断できる。しかし、実務的には、単純にファットテイルでないから「ラプラス分布が最適である」とは限らない。ここでは他の分析も参考にした上で、総合的に判断するべきであるという方向性として正規性・適合性の検定を取り上げる。

3.3.3 正規性の検定

正規性の検定では、シャピロ-ウィルク検定、アンダーソン-ダーリング検定、ジャルク-ベラ検定及びダゴスティノー-ピアソン検定の 4 つの検定を実施し、その結果を表 3-3 に示した。

結果としては表 3-3 のとおり、リスクレベル高騰局面においては 2008 年 9 月 12 日から始まる 3 日間では 4 つの検定すべてにおいて「正規性あり」という判定となったが、2008 年の残りの 3 期間ではすべて「正規性なし」の判定となった。つまり、イベント発生以前では正規性がある分布の形状であったが、イベントの発生によりそれ以降では正規性のない分布の形状へと変化したことがわかる。

一方、リスクレベル低下局面では 2009 年 12 月 22 日から始まる 3 日間ではアンダーソン-ダーリング検定を除く 3 つの検定において「正規性あり」という判定となったが、2009 年の残りの 3 期間ではすべての期間において「正規性なし」の判定となった。つまり、イベント発生以前では正規性がない分布の形状であったが、イベントの発生により

それ以降では正規性がある分布の形状へと変化したことがわかる。リスクレベル低下局面においてはイベント発生の定義が難しく、現実には「リーマン・ショックの影響が反映される観測データが観測期間から除外されていく時期」が始まる日を指しており、2009年10月26日がこれに当たる。このイベント日以降、正規分布に徐々に近づいていくことがわかる。

表 3-3 正規性の検定

《リスクレベル高騰局面》

	20080912	20080916	20080917	20081014	20081015	20081016
Shapiro-Wilk 検定						
W	0.995645	0.994705	0.994588	0.937362	0.937348	0.926520
p値	0.705768	0.534237	0.514066	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性あり	正規性あり	正規性あり	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Anderson-Darling 検定						
A2	0.333606	0.348039	0.359036	1.398546	1.400465	1.991603
p値	0.507819	0.475098	0.448328	0.001258	0.001244	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性あり	正規性あり	正規性あり	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Jarque-Bera 検定						
JB (観測値)	0.7146	1.6035	1.7259	427.8878	428.1678	446.1187
JB (臨界値)	6	6	6	6	6	6
DF	2	2	2	2	2	2
p値	0.699573	0.448552	0.421918	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性あり	正規性あり	正規性あり	正規性なし	正規性なし	正規性なし
D'Agostino-Pearson 検定						
K ²	0.8533	1.8678	1.9962	51.9999	52.0433	43.8128
p値	0.6526	0.3930	0.3685	0	0	0
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性あり	正規性あり	正規性あり	正規性なし	正規性なし	正規性なし
20081030 20081031 20081104						
Shapiro-Wilk 検定						
W	0.935217	0.937290	0.939984	0.949847	0.949684	0.950677
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Anderson-Darling 検定						
A2	2.755593	2.636660	2.579139	2.349446	2	2
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Jarque-Bera 検定						
JB (観測値)	226.6689	216.8612	200.3550	146.1505	146.7937	137.8929
JB (臨界値)	6	6	6	6	6	6
DF	2	2	2	2	2	2
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
D'Agostino-Pearson 検定						
K ²	33.4806	32.8987	31.8706	27.9733	28.0186	27.2038
p値	0	0	0	0	0	0
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
20081118 20081119 20081120						
Shapiro-Wilk 検定						
W	0.935217	0.937290	0.939984	0.949847	0.949684	0.950677
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Anderson-Darling 検定						
A2	2.755593	2.636660	2.579139	2.349446	2	2
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Jarque-Bera 検定						
JB (観測値)	226.6689	216.8612	200.3550	146.1505	146.7937	137.8929
JB (臨界値)	6	6	6	6	6	6
DF	2	2	2	2	2	2
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
D'Agostino-Pearson 検定						
K ²	33.4806	32.8987	31.8706	27.9733	28.0186	27.2038
p値	0	0	0	0	0	0
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし

(出所) 筆者作成

《リスクレベル低下局面》

	20091005	20091006	20091007	20091026	20091027	20091028
Shapiro-Wilk 検定						
W	0.939406	0.939332	0.939254	0.954862	0.955870	0.968342
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Anderson-Darling 検定						
A2	3.540066	3.551426	3.567179	2.959472	2.852320	2.240493
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Jarque-Bera 検定						
JB (観測値)	170	170	169	92	89	44
JB (臨界値)	6	6	6	6	6	6
DF	2	2	2	2	2	2
p値	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
D'Agostino-Pearson 検定						
K ²	29.8475	29.8377	29.8049	32.8693	32.3145	18.1016
p値	0	0	0	0	0	0.0001
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
20091112 20091113 20091116 20091222 20091224 20091225						
Shapiro-Wilk 検定						
W	0.985324	0.984497	0.984659	0.991244	0.990810	0.990365
p値	0.011117	0.007891	0.008439	0.139107	0.115649	0.095607
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性あり	正規性あり	正規性あり
Anderson-Darling 検定						
A2	1.338911	1.362382	1.325555	0.820286	0.858002	0.901127
p値	0.001765	0.001545	0.001904	0.033679	0.027169	0.021254
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性なし
Jarque-Bera 検定						
JB (観測値)	10.0279	11.3248	12.2051	3.0098	3.2407	3.4856
JB (臨界値)	6	6	6	6	6	6
DF	2	2	2	2	2	2
p値	0.006645	0.003474	0.002237	0.222035	0.197831	0.175032
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性あり	正規性あり	正規性あり
D'Agostino-Pearson 検定						
K ²	7.0093	7.5254	8.3300	2.8375	2.9900	3.1287
p値	0.0300	0.0232	0.0155	0.2420	0.2242	0.2092
α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
判定	正規性なし	正規性なし	正規性なし	正規性あり	正規性あり	正規性あり

(出所) 筆者作成

ここで正規性の検定をまとめると、現実の収益率の観測分布が正規分布に当てはまるか否かを確認できるが、ファットテイル性の判定と同様、他の分析を参考とした上で総合的に判断するべきであろう。

3.3.4 適合性の検定

適合性の検定では 1 標本コルモゴロフ-スミルノフ検定を用い、正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布・ジョンソン分布について、表 3-4 のとおり 5 分布を表記することとし、これら 5 分布との適合性を確認して、表 3-5 適合性の検定に結果を示した。5 分布のうち、適合度合の良い上位 3 分布を表示した。

表 3-4 5 分布の表記法

確率分布	表記
正規分布	Normal
ロジスティック分布	Logistic
双曲線正割分布	HSecant
ラプラス分布	Laplace
ジョンソン分布	Johnson

リスクレベル高騰局面では、2008 年 9 月 12 日から始まる 3 日間では正規分布の適合性が高い。次に 2008 年 10 月 14 日から始まる 3 日間ではロジスティック分布の適合性が高く、3 日目の 10 月 16 日には双曲線正割分布の方が適合性は高くなった。次に 2008 年 10 月 30 日から始まる 3 日間ではジョンソン分布の適合性が高い。最後に 2008 年 11 月 12 日から始まる 3 日間ではジョンソン分布と双曲線正割分布の適合性が高い。

リスクレベル高騰局面の結果としては、リーマン・ショックの影響の前では正規分布が適合していたが、一旦大きな変動が始まると正規分布より尖度が高い、ロジスティック分布（尖度：4.2）、双曲線正割分布（尖度：5）、ラプラス分布（尖度：6）へと徐々に移行していくことが確認できる。ジョンソン分布の適合性は、パラメータ数が他の確率分布より多いため適合度が良好となることを予測していたが、現実の収益率の観測分

布が正規分布に近くなるほどジョンソン分布の適合は悪くなるという結果となった。ジョンソン分布が正規分布の進化系と言われるように、あくまでも正規分布を基礎としており、leptokurtic (急尖的) な確率分布としてロジスティック分布とともにその代表的な確率分布となっている。つまり尖度が高くなる状況で真価が発揮されるものと想像している。

リスクレベル低下局面では、2009年10月5日から始まる3日間ではジョンソン分布の適合性が高い。次に2009年10月26日から始まる3日間では双曲線正割分布の適合性が高い。次に2009年11月12日から始まる3日間では10月26日と同様に双曲線正割分布の適合性が高い。最後に2008年11月12日から始まる3日間ではロジスティック分布の適合性が高い。

リスクレベル低下局面の結果としては、リスクレベル高騰局面とは逆の推移を示し、ジョンソン分布から双曲線正割分布へ、双曲線正割分布からロジスティック分布へ、と徐々に移行していくことが確認できる。

表 3-5 適合性の検定
 (1 標本コルモゴロフ-スミルノフ検定)
 <リスクレベル高騰局面>

適合性検定		
2008/09/12	2008/09/16	2008/09/17
Normal	Normal	Normal
Johnson	Johnson	Johnson
Logistic	Logistic	Logistic

適合性検定		
2008/10/14	2008/10/15	2008/10/16
Logistic	Logistic	HSecant
HSecant	HSecant	Logistic
Normal	Normal	Johnson

適合性検定		
2008/10/30	2008/10/31	2008/11/04
Johnson	Johnson	Johnson
HSecant	HSecant	HSecant
Laplace	Laplace	Laplace

適合性検定		
2008/11/18	2008/11/19	2008/11/20
Johnson	Johnson	HSecant
HSecant	HSecant	Johnson
Laplace	Laplace	Laplace

(出所) 筆者作成

<リスクレベル低下局面>

適合性検定		
2009/10/05	2009/10/06	2009/10/07
Johnson	Johnson	Johnson
Laplace	HSecant	HSecant
HSecant	Laplace	Laplace

適合性検定		
2009/10/26	2009/10/27	2009/10/28
HSecant	HSecant	HSecant
Logistic	Logistic	Logistic
Johnson	Johnson	Johnson

適合性検定		
2009/11/12	2009/11/13	2009/11/16
HSecant	HSecant	HSecant
Logistic	Logistic	Johnson
Johnson	Johnson	Logistic

適合性検定		
2009/12/22	2009/12/24	2009/12/25
Logistic	Logistic	Logistic
HSecant	HSecant	HSecant
Johnson	Johnson	Johnson

(出所) 筆者作成

表 3-6 適合性の検定の結果数値
 ≪リスクレベル高騰局面≫

観測日	分布	検定統計量	p値
2008/9/12	Normal	0.03736	0.86160
2008/9/16	Normal	0.03658	0.87775
2008/9/17	Normal	0.03358	0.93058
2008/10/14	Logistic	0.04016	0.79747
2008/10/15	Logistic	0.04021	0.79627
2008/10/16	HSecant	0.04223	0.74558
2008/10/30	Johnson	0.03923	0.81979
2008/10/31	Johnson	0.04139	0.76709
2008/11/4	Johnson	0.04080	0.78184
2008/11/18	Johnson	0.03955	0.81220
2008/11/19	Johnson	0.03903	0.82441
2008/11/20	HSecant	0.03915	0.82160

≪リスクレベル低下局面≫

観測日	分布	検定統計量	p値
2009/10/5	Johnson	0.05875	0.33848
2009/10/6	Johnson	0.05818	0.34989
2009/10/7	Johnson	0.05940	0.32576
2009/10/26	HSecant	0.06180	0.28139
2009/10/27	HSecant	0.05925	0.32854
2009/10/28	HSecant	0.04960	0.55055
2009/11/12	HSecant	0.04543	0.66100
2009/11/13	HSecant	0.04529	0.66458
2009/11/16	HSecant	0.04682	0.62374
2009/12/22	Logistic	0.03614	0.88648
2009/12/24	Logistic	0.03643	0.88061
2009/12/25	Logistic	0.03401	0.92387

(出所) 筆者作成

表 3-6 適合性の検定の結果数値では、リスクレベル高騰局面として 4 観測日を選択し、その後続く 2 観測日も合わせて全部で 12 観測日について確率分布の適合性を比較検証した。一方、リスクレベル低下局面についても 4 観測日を選択し、その後続く 2 観測日も合わせて全部で 12 観測日について確率分布の適合性を比較検証した。それぞれの 4 観測日は、「イベント前の安定期」「イベント直後の変動期」「変動期」「イベント後の安定期」と整合させたものであり、これを市場リスク計測における『リスクフェーズ区分』と呼ぶこととする。

ここで適合性の検定について言及しておく、これまでの「収益率の観測分布の左端の分析」であるファットテイル性の判定と「収益率の観測分布全体の分析」である正規性の検定はいずれも限定的でそれらの分析だけでは十分とは言い難いものであったが、適合性の検定については十分な説明力¹²を有しており、適合度分析の中心とすべき分析と考えられる。この適合性の検定をメインとして他の分析を加味して適合度を判断していく方法を採用。特にファットテイル性の判定についてはファットテイルの程度を把握するための必須分析とすることとした。

3.4 リスクフェーズ区分の設定と Value-at-Risk 推定

統計的推測の観点から言及すると、知りたいと思う母集団から無作為に標本を抽出して母集団分布の特性を推測するのが統計的推測の本来の姿であろう。しかしながら、抽出した標本分布が母集団分布とは明らかに異なる場合がある。たとえば何か大きなイベントが発生することで母集団分布には大きく影響を及ぼさないが、標本分布には大きく影響して母集団分布とはかけ離れた分布となる場合が考えられる。また、統計学ではより良い代表値を算出するために、大きなイベントによる外れ値を取って除外して計算するという考え方もある。ところが市場リスク管理上の推定では、恣意的な判断が入ることを嫌い、外れ値を除外して計算する方法は採られない。つまり、市場リスク計測においては観測データをそのまま利用してリスク量を計測する場合はほとんどであろう。

流動性リスク管理では、平常時・懸念時・危機時という3つのリスクフェーズに区分して、その状況に応じて対応策を適時適切に実施する体制を採っている。市場リスク計測でも同じような考え方を導入することが適切であろう。

通常、市場リスク計測においては擬似母集団分布¹³が正規分布に従っていることを想定して、仮定する確率分布として正規分布を採用している¹⁴。ところが実際にはファットテイル性の問題が生じているのは事実であるにもかかわらず、正規分布が適合していない時期においても一律に正規分布を仮定して分散共分散法によりリスク量を計算している。この問題に対しては、市場リスク管理上の何らかの対策が必要であろう。

そこで特に危機時となる時期については、リスク量をより正確に計測すべきという観点から、リスクフェーズ区分の設定をした上で危機時という判断の下、基準日時点の損失率の観測分布に適合した確率分布を仮定してリスク量を算出する概念を提案する。

3.4.1 擬似母集団分布の特性

擬似母集団分布を推測するにあたり、2008年9月～11月のValue-at-Risk推定においては2007年12月末日を基準日とする。期間は基準日を含む前1年と基準日を含む前2年とする。ここでも3.3.4適合性の検定において実施した、1標本コルモゴロフ-スミルノフ検定（以下、KS法）により適合度を分析する。用いる確率分布は、正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布・ジョンソン分布の5分布とする。

2007年12月末基準（期間1年）においては双曲線正割分布の適合度が高く、2007年12月末基準（期間2年）においても双曲線正割分布の適合度が高い。ここではよりよい推定をするため、期間を長く採り期間2年を採用し、下記に基本統計量とKS法による検定結果を表示した。

表 3-7 擬似母集団分布の基本統計量と検定結果
2007年12月末基準（期間2年）

基準日の基本統計量

平均	-0.000226
標準偏差	0.012086
歪度	-0.345163
尖度	4.316618
最小	-0.057
最大	0.037
標本数	493

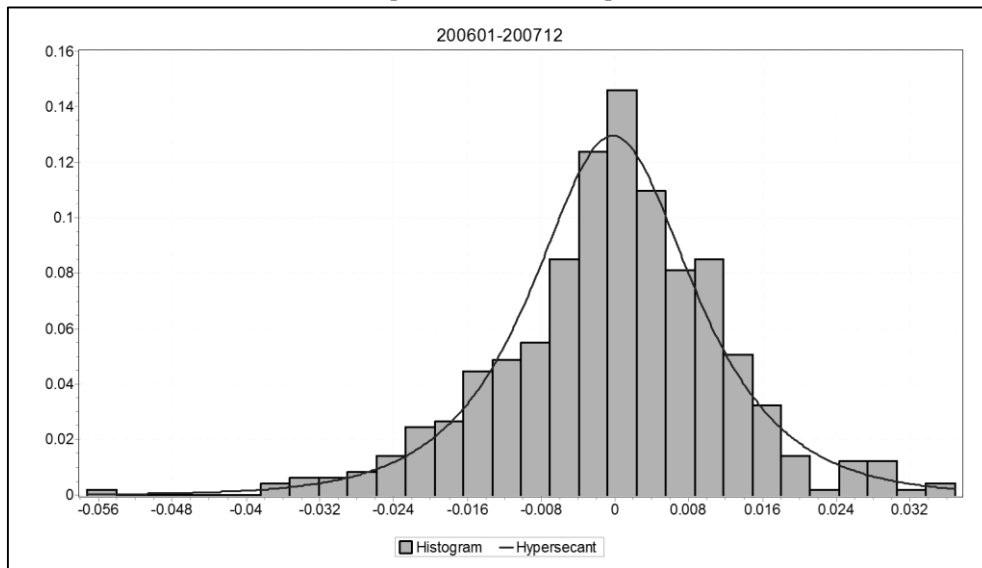
KS法による検定結果

双曲線正割分布

KS	
Sample Size	493
Statistic	0.04586
P-Value	0.24352

（出所）筆者作成

図 3-6 基準日の確率分布比較 (擬似母集団)
[双曲線正割分布]



(出所) 筆者作成

※図中の表記, Hypersecant は双曲線正割分布であり, HSecant と同義である.

図 3-6 基準日の確率分布比較（擬似母集団）2007 年 12 月末基準（期間 2 年）では尖度が 4.3 とやや尖った形状となっており、大きな外れ値のない双曲線正割分布に近い分布形状を示している。

上記のように、2008 年度のリスク推定にあたり 2006 年 1 月～2007 年 12 月の観測データを用いて擬似母集団分布を推測したとしよう。たとえば擬似母集団分布の推測結果として「双曲線正割分布の適合度が高い」となったとして、さらに Value-at-Risk 推定のための観測分布も正規分布から大きく離れた確率分布になっているにもかかわらず、仮定する確率分布を正規分布とした場合を考える。何か大きなイベントが発生したという事実があるにもかかわらず、正規分布を仮定し続ける合理的な理由付けができるのだろうか。正常時ならまだしも、イベントの発生という危機が生じた場合には、その危機発生をトリガーとしてその状況に適応した対応を図る方が望ましい。

3.4.2 分布特性に適合したリスクフェーズ区分

まず、平常時に対応した「イベント前の低位安定期」では正規分布を適用する。次に、危機時に対応した「イベント直後の変動期」と「変動期」を合わせた「イベントを含む変動期」では双曲線正割分布を中心として、基準日の確率分布の状況に合わせてロジスティック分布とラプラス分布の 3 分布で対応する。最後に、懸念時に対応した「イベント後の高位安定期」ではジョンソン分布を適用する。

しかしながら、「イベント後の高位安定期」については懸念時に対応と言いつつも、全く同じではない。つまり市場リスク計測における観測データは毎日変動しており、イベントのデータは当該基準日から観測期間が経過して初めて除外されるため、相当の期間に渡りイベントデータの影響が残る。さらに高位安定期は当初に決めた観測期間とほぼ同程度の期間に及ぶことから、流動性リスクにおける懸念時とは根本的に異なる。

流動性リスクにおける「懸念時」は、資金繰りの切迫度に応じて 平常時→懸念時→危機時のように段階的にリスクの程度が大きくなっていくうちの、中間に位置する時点を示している。一方、上記に示した市場リスク計測上の「懸念時」では、すでに大きなイベントが発生したあとで、リスクレベルは高いが安定している時期を指している。こ

の時点よりあとにさらに中規模なイベント(あるいは小規模なイベント)が発生すると、リスクレベルは急激に上昇する懸念を含んでいる。この意味で「懸念時」としている。

表 3-8 リスクフェーズ区分別適用分布

《リスクレベル高騰局面》

修正後フェーズ区分	期 間	適用する分布
イベント前の低位安定期	～ 2008/10/13	正規分布
イベントを含む変動期	2008/10/14～12/30	ロジスティック分布 双曲線正割分布 ラプラス分布
イベント後の高位安定期	2008/11/11 ～	ジョンソン分布

《リスクレベル低下局面》

修正後フェーズ区分	期 間	適用する分布
イベント前の安定期	～ 2009/10/20	ジョンソン分布
イベント後の変動期	2009/10/21～12/30	ロジスティック分布 双曲線正割分布 ラプラス分布
イベント後の安定期		正規分布

(出所) 筆者作成

たとえば、上記の例で言うと、2007年12月末基準（期間2年）における適合性の高い確率分布として「双曲線正割分布」であることが事前にわかっていたら、低位安定期に適用する確率分布として正規分布と双曲線正割分布の中間の確率分布となるロジスティック分布を適用するという保守的な方法もあるだろう。あくまでも基準日（リスクを計測する日）時点の観測データ分布（251個のデータの基本統計量）から適用する確率分布を適合性の検定により合理的に判断する。

3.4.3 Value-at-Risk 推定の結果

図3-7 Value-at-Risk 推定「リスクレベル高騰局面」においては、Johnson-VaR, Normal-VaR, Logistic-VaR, HSecant-VaR と Laplace-VaR をそれぞれ比較して示している。特に正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布の4分布は関係性が強く、平均と標準偏差が等しいという条件の下、信頼水準が99%であれば、

$$\text{Laplace-VaR} > \text{HSecant-VaR} > \text{Logistic-VaR} > \text{Normal-VaR}$$

という大小関係が成り立つ¹⁵。

Normal-VaR と Logistic-VaR を比較すると、すべての期間を通じて Logistic-VaR の方が Normal-VaR より大きくなる。乖離幅は当初2008年9月においては0.35%程度だったものが、イベント直後（10月中旬）では0.45%程度に広がり、2008年11月中旬以降は0.53~0.54%程度まで拡大している。

次に Laplace-VaR と HSecant-VaR¹⁶の結果比較でも同様に、すべての期間において Laplace-VaR の方が若干大きくなる傾向が観察できる。乖離幅は当初2008年9月においては0.20%程度だったものが、イベント直後（10月中旬）では0.26%程度に広がり、2008年11月中旬以降は0.314~0.317%程度まで拡大している。

さらに、Johnson-VaR の推移を観察すると、9月1日~10月7日の間は Normal-VaR と Logistic-VaR の間に位置しており、比較的低いレベルとなっている。10月8日~10日の3日間については Laplace-VaR の近くまで急騰（1回目高騰）し、その後2日間は Logistic-VaR の下まで一旦下落する。10月16日~11月4日では HSecant-VaR より高く

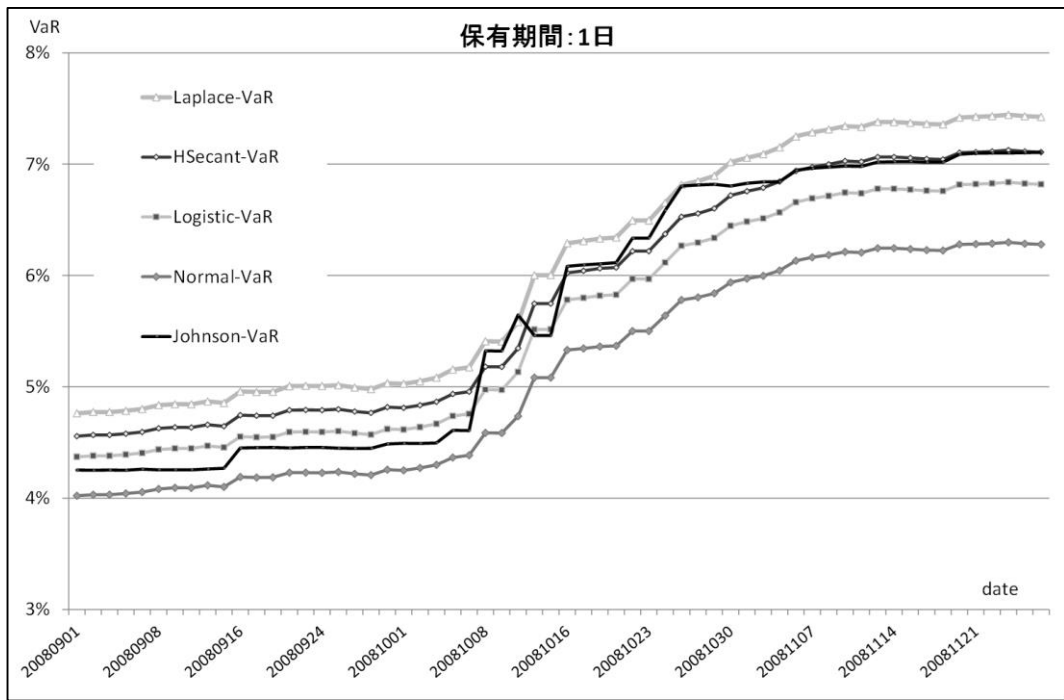
Laplace-VaR より低い位置まで高騰（2 回目高騰）し、11 月 5 日以降は HSecant-VaR と同等なレベルで推移する。

Johnson-VaR の 1 回目高騰でも 2 回目高騰でも HSecant-VaR を超えるが、Laplace-VaR を超過することはない、という状況となっている。このように Johnson-VaR の推移が 1 つのベンチマークになっており、リスクレベルの判定に役立つことが期待できる。

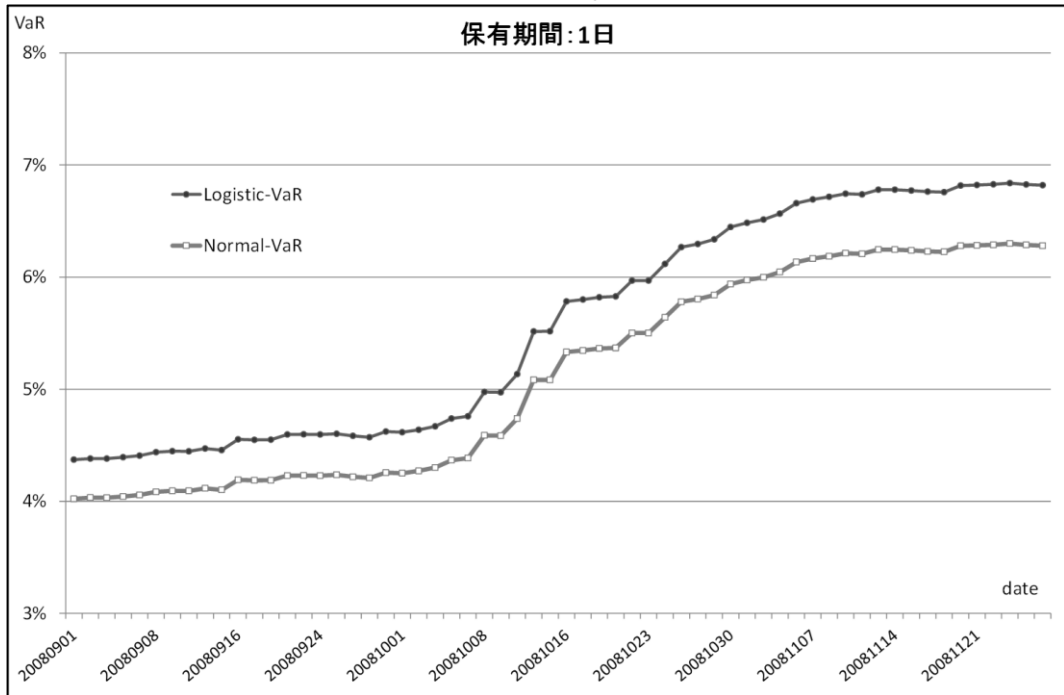
一方、図 3-8 Value-at-Risk 推定《リスクレベル低下局面》においても、Johnson-VaR, Normal-VaR, Logistic-VaR, HSecant-VaR と Laplace-VaR をそれぞれ比較して示している。ここでも正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布の 4 分布を仮定した Value-at-Risk 推定は比例関係を示している。

リスクレベル高騰局面と同様に Johnson-VaR の推移を観察すると、10 月 1 日～10 月 23 日の間は HSecant-VaR と Laplace-VaR の間に位置しており、比較的高いレベルとなっている。10 月 26 日～27 日の 2 日間については一旦上昇する、という他では見られない推移となっている。その後 10 月 28 日～11 月 5 日では HSecant-VaR と Laplace-VaR と同様な推移となり、11 月 6 日と 11 月 9 日の 2 日連続の下落（急落）により、Logistic-VaR よりも低くなり、階段状に Normal-VaR と同等なレベルまで低下していく。

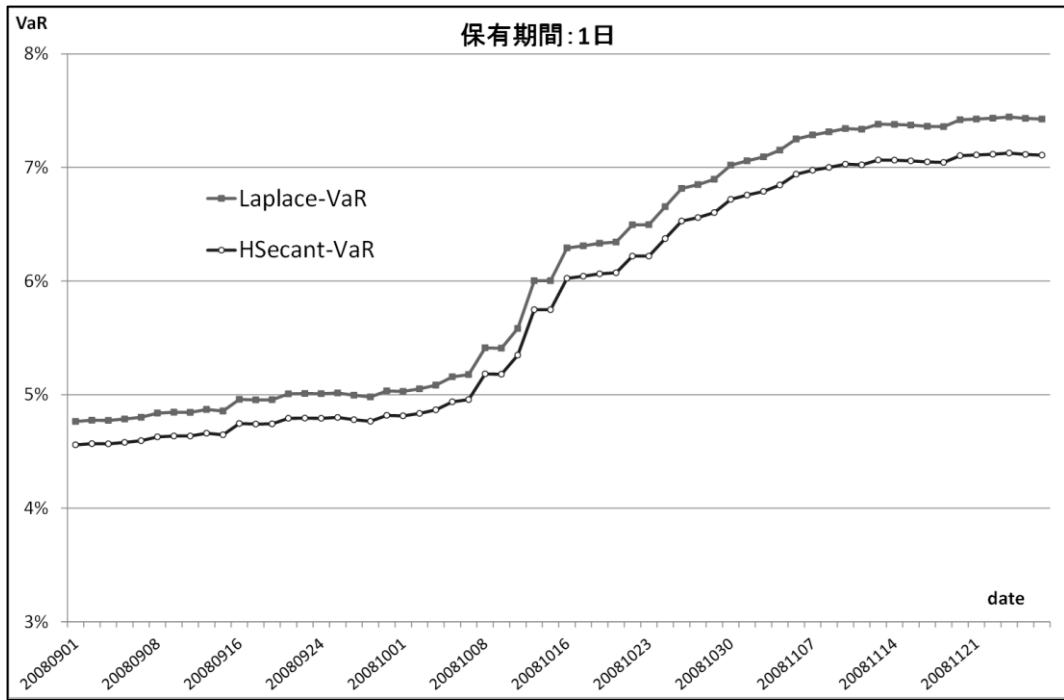
図 3-7 Value-at-Risk 推定
 ≪リスクレベル高騰局面≫
 5 分布



Normal-VaR と Logistic-VaR

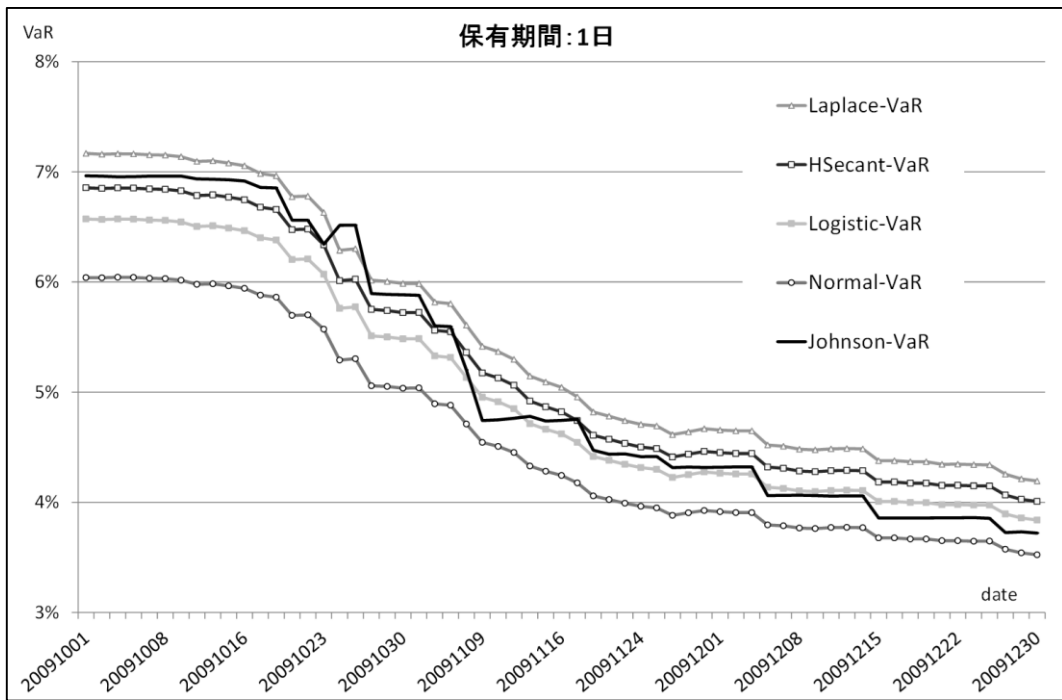


HSecant-VaR と Laplace-VaR

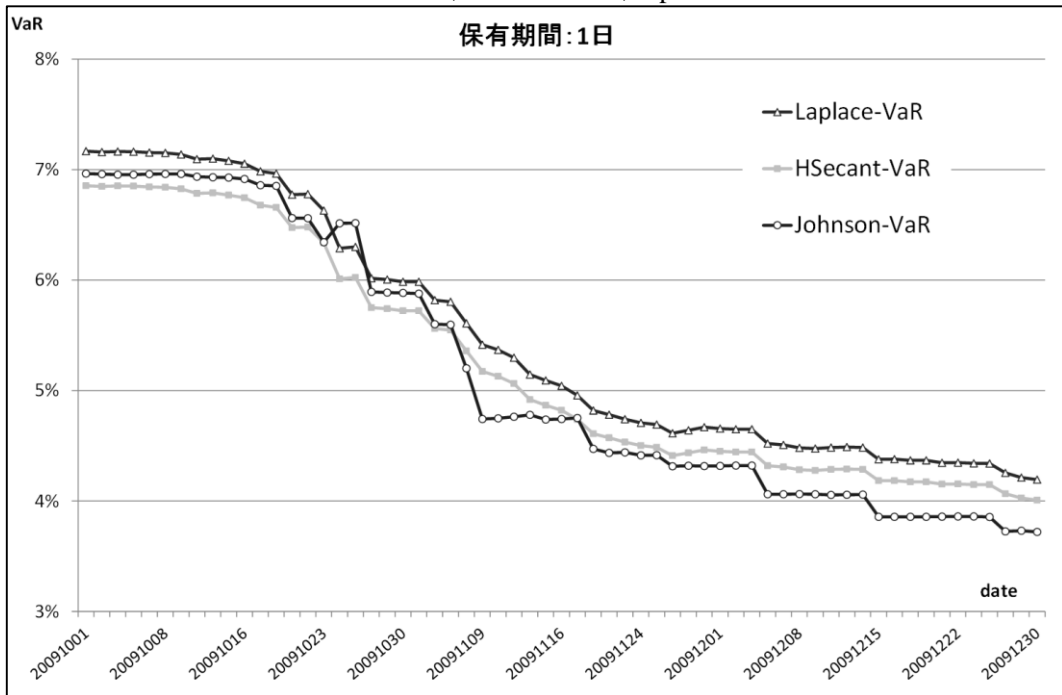


(出所) 筆者作成

図 3-8 Value-at-Risk 推定
 ≪リスクレベル低下局面≫
 5 分布



Johnson-VaR, HSecant-VaR, Laplace-VaR



(出所) 筆者作成

3.5 考察

一般的なヒストリカル・シミュレーション法を使用すれば観測データに即した推定ができるのではないかという疑問がまず残っている。確かにヒストリカル・シミュレーション法には概念がシンプルである，安定性が高い，というメリットがある。しかしながら，シンプルな概念は翻すと過去データへの依存度が高いというデメリットとなる。一方，高い安定性は翻すとリスクファクター変動に対する感応度が低いというデメリットになる。

また，本章では1リスクファクターモデルを取り上げているが，実務ではマルチファクターモデルとなり複雑なポートフォリオになる。マルチファクターモデルにおけるリスク量変動の原因分析ではヒストリカル・シミュレーション法は調査が非常に困難となる。リスク量変動が同じ方向に動くわけでもなく，リスクファクターごとの変動量もそれぞれ異なる上，リスクファクター同士の相関も推定値に影響を及ぼす。

ヒストリカル・シミュレーション法をモンテカルロ・シミュレーション法の1つのパターンであると理解すると，そのデータ量の少なさにおいてもモンテカルロ・シミュレーション法に条件付き¹⁷で劣り，ヒストリカル・シミュレーション法の最大の欠点となる。

以上のようにヒストリカル・シミュレーション法にはいまだ多くの課題が残されており，代表的なバックワード・ルッキングな手法であることに変わりない。そこでヒストリカル法で用いられる経験損失分布に1変量パラメトリック分布を当てはめる方法に着目し，リスクフェーズ区分の設定及びそれに適合した確率分布の選択という方法の概念を提案した。

前節の分析により，実際の観測データの当てはまりを分析することで適用可能な確率分布がほぼ限定できることがわかった。しかも，適用可能な確率分布とリスクフェーズ区分を整合的に選択することができるため，リスクフェーズ区分を設定することには意義があると考えられる。観測データの変動の方向性（プラス方向・マイナス方向）に合わせてリスクフェーズ区分自体も柔軟に設定する必要があり，リスクフェーズ区分の変更を実施すべきタイミングも限定的であることもわかった。

たとえ上記の方法を採用したとしても、ファットテイル問題を完全に払拭することはできない。しかしながら、詳細な分析を実施することで現実のファットテイル性の程度を把握することができるならば、一律に正規分布を仮定しているケースとは状況は大きく異なると言えよう。逆に定常性の仮定の問題として、将来のリスクファクター変動が過去の変動と同じとなることが Value-at-Risk 推定の限界として議論されるようになってきていることを考慮すれば、提案する方法を使えば過去の変動実績とは違う、将来の予測として Value-at-Risk 推定値を捉えることも可能となりうる。とはいえ、現実のファットテイル性の問題は忘れるべきでなく、ファットテイル性の問題を考慮しつつ、基準日時点の損失分布（観測分布）の状況に整合的な確率分布を識別した上で、その選択した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定を行う方法の概念を示した。

本章では、大きく3つのリスクフェーズに区分する方法を採用した。1 リスクファクターのケースで比較分析している都合上、分析が非常に簡単にできるように見えるが、実務レベルではリスクファクター数は非常に多くなり、すべてのリスクファクターに対する見直しやモニタリングの頻度を多くすることは、実務上困難であり現実的でない。

さらに、今回の分析でわかったこととして、3.4.1 擬似母集団分布の特性において双曲線正割分布の適合性が他の非正規分布に比べて高かったことと、選定した各基準日での当てはまりにおいても双曲線正割分布の適合性が高かったことがあげられる。また、擬似母集団分布の特性を分析して近似できる確率分布を特定した上で、判断の基準とすることも有用であることを示した。

-
- ¹ ファットテイルは、平均から極端に離れた事象の発生する確率が正規分布から予想される確率よりも高い現象を指す。ファットテイル性の問題は、リスクファクター変動に正規分布を仮定すると、リスクを過小評価する可能性があることを指している。
- ² 厳密に言えば、前日終値から当日終値への変化率を指しており、特にリスクを意識して損失という視点から損失率をベースとしている。ただし、図で表示する場合、収益率とした方が理解しやすい場合もあり、その時には収益率をベースに表記していることもある。
- ³ 第2章では観測期間 500 日（2 年相当）を採用している。
- ⁴ ロジスティック分布では、歪度=0, 尖度=4.2 , 双曲線正割分布では、歪度=0, 尖度=5, ラプラス分布では、歪度=0, 尖度=6 となる。
- ⁵ 99%分位点とは計測値を小さい値から大きい値に並べ変え、計測値全体の 99%に位置する計測値をいう。信頼水準 99%における分位点を指す。
- ⁶ 真壁・久保田[2006], 蓑谷[1992], 蓑谷[2001], 蓑谷[2012] を参照。
- ⁷ Shapiro and Wilk [1965] を参照。
- ⁸ Anderson and Darling [1952] を参照。AD 検定は適合性の検定であるが、正規分布への適合性の検定により正規性の検定とする場合がある。
- ⁹ Jarque and Bera [1987] を参照。
- ¹⁰ D'Agostino and Stephens [1986] を参照。
- ¹¹ 有効数字 3 桁で一致した場合、一致したものとみなしている。
- ¹² 適合性の検定をすると累積分布関数のグラフを確認することで、ファットテイル判定と同じような分析を行っていることになる。また、適合性の検定において仮定する確率分布に正規分布を含めておけば、正規性の検定と同様に正規性の判定も確認できる。その意味で説明力が高いとした。
- ¹³ 逆規定された母集団という意味で「擬似母集団」を使用した。quasi-population 準母集団とも言う。

-
- ¹⁴ 正規性の検定で見たように、リーマン・ショックというイベントが発生する以前は、現実の損失率の観測分布には正規性があるということがわかっている。すなわち、平常時に正規分布を仮定することに問題はなく、本章ではイベント発生後の対応を重視している。
- ¹⁵ 第2章, 2.3.2 4分布の比例関係の考察を参照。
- ¹⁶ 双曲線正割分布は、図中では **HSecant** あるいは **Hypersecant** と表記している。 **Hyperbolic Secant** を略したものである。
- ¹⁷ ヒストリカル法では通常、特定の確率分布を仮定することはないが、モンテカルロ・シミュレーション法では特定の確率分布を仮定する。この仮定する確率分布の当てはまりが良くなければモンテカルロ・シミュレーション法といえども必ずしも有効な方法とは言えないので、「条件付き」という文言を加えている。この確率分布の当てはまりが良ければモンテカルロ・シミュレーション法は有効な方法と言え、ヒストリカル法に勝る手法と考えられる。

Appendix D : 仮説検定について

正規性の検定の手順

- [1] 帰無仮説と対立仮説を設定する.

帰無仮説 H_0 : 観測データの分布は正規分布に従う.

対立仮説 H_1 : 観測データの分布は正規分布に従わない.

- [2] 検定統計量を選択する.

- [3] 有意水準を決定する.

有意水準 : $\alpha=0.05$

- [4] 検定統計量の実現値を計算して棄却域・採択域との比較をする.

さらに p 値を計算する.

p 値とは、帰無仮説が正しいという仮定のもとで、標本から計算した検定統計量の実現値以上の値が得られる確率である.

- [5] 検定結果を判断する.

検定統計量が棄却域に入るならば、帰無仮説を棄却する.

: 検定結果は 5%水準で有意である.

検定統計量が棄却域に入らなければ、帰無仮説を棄却できない.

: 検定結果は 5%水準で有意でない.

シャピロ-ウィルク検定

標本 x_1, \dots, x_n が正規母集団からサンプリングされたものであるという帰無仮説を検定する.

$$W \text{ 統計量} = \frac{(k\hat{\sigma})^2}{s^2} = \frac{\{\sum_{i=1}^n ka_i Y_i\}^2}{s^2}$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

k は W が常に 0 と 1 の間をとるよう $\sum_{i=1}^n (ka_i)^2=1$ という規準化を満たす定数である.

アンダーソン-ダーリング検定

コルモゴロフ-スミルノフ適合度検定の改良版であり、標本データが仮説の分布と異なっているかどうかを調べるために用いられる。

$$\text{AD 統計量 } A^2 = -\sum_{i=1}^n \left[(2i-1) \frac{\log p_i + \log(1-p_{n+1-i})}{n} \right] - n$$

$$\text{修正統計量 } A^* = A^2 \left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

$$Z_{(i)} = \frac{x_i - \bar{X}}{s}, \quad p_i = \Phi(Z_{(i)}) = \int_{-\infty}^{Z_{(i)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad i=1, 2, \dots, n$$

※修正統計量の右辺のうち、 $\left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$ は統計量の右辺において \log を取ったものを元に戻すための近似計算式である。

ジャルク-ベラ検定

標本データが正規分布に従う尖度と歪度を有しているかどうかを調べる適合度検定であり、標本数が多いほど強力となる。

$$\text{JB 統計量} = \frac{nb_1}{6} + \frac{n(b_2-3)^2}{24}$$

$$\text{歪度: } \sqrt{b_1}, \quad \text{尖度: } b_2$$

ダゴスティーノ-ピアソン検定

かばん検定 (portmanteau test) とも呼ばれる。

$$\text{DP 統計量} = Z_1^2 + Z_2^2$$

$$Z_1 = \delta \log \left\{ \frac{Y}{\alpha} + \left[\left(\frac{Y}{\alpha} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$Z_2 = \frac{\left(1 - \frac{2}{9A} \right) - \left\{ \frac{1 - (2/A)}{1 + Y\sqrt{2/(A-4)}} \right\}^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2/(9A)}}$$

$$Y = \sqrt{b_1} \left\{ \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}$$

$$\gamma = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}$$

$$B^2 = -1 + \{2(\gamma - 1)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\log B}}, \quad \alpha = \left\{ \frac{2}{(B^2 - 1)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 6 + \frac{8}{\kappa_3} \left\{ \frac{2}{\kappa_3} + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\kappa_3} \right)^2} \right\}, \quad \kappa_3 = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}}$$

適合性の検定の手順

[1] 帰無仮説と対立仮説を設定する.

帰無仮説 H_0 : 観測データの分布は仮説の分布と同じである.

対立仮説 H_1 : 観測データの分布は仮説の分布と同じでない.

[2] 検定統計量を選択する.

[3] 有意水準を決定する.

有意水準 : $\alpha = 0.05$ 両側検定

[4] 検定統計量の実現値を計算して棄却域・採択域との比較をする.

さらに p 値を計算する.

[5] 検定結果を判断する.

検定統計量が棄却域に入るならば, 帰無仮説を棄却する.

: 検定結果は 5% 水準で有意である.

検定統計量が棄却域に入らなければ, 帰無仮説を棄却できない.

: 検定結果は 5% 水準で有意でない.

1 標本コルモゴロフ-スミルノフ適合度検定

$$\text{KS 統計量 } D = \sup(|F_n(x) - \tilde{F}(x)|)$$

$F_n(x)$: 観測データの分布の累積分布関数

$\tilde{F}(x)$: 仮説の分布の累積分布関数

・ 標本個数 n より $D\sqrt{n}$ を計算する.

・ 有意水準 5% の場合, $D\sqrt{n} \geq 1.36 \Rightarrow$ 帰無仮説を棄却する. : 一致しない

アンダーソン-ダーリング検定

標本データが仮説の分布と異なっているかどうかを調べるために用いられる.

$$\text{AD 統計量 } A^2 = -\sum_{i=1}^n \left[(2i-1) \frac{\log p_i + \log(1-p_{n+1-i})}{n} \right] - n$$

$$\text{修正統計量 } A^* = A^2 \left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

$$Z_{(i)} = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

各分布の密度関数より p_i を算出.

※修正統計量の右辺のうち、 $\left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$ は統計量の右辺において \log を取ったものを元に戻すための近似計算式である.

Appendix E : 観測分布と仮定分布との比較

現実の収益率の観測分布と仮定した確率分布(ジョンソン SU 分布, 双曲線正割分布)の適合性を視覚的に確認するため, 図 E-1~E-8 に示した. 観測データは縦棒(ヒストグラム), 仮定した確率分布は曲線で表記している. また, アンダーソン-ダーリング検定統計量(以下, AD 統計量)は低いほど適合度が良好となり, 分布の適合度を AD 統計量で判断している.

リスクレベル高騰局面において, 2008 年 9 月 12 日ではジョンソン SU 分布の適合度は良好であるが, 双曲線正割分布では適合していると判断できない.

2008 年 10 月 14 日についてはイベント直後であり, ジョンソン SU 分布は悪化となったが, 双曲線正割分布では逆転して良好となっている.

2008 年 10 月 30 日では観測データが平均付近で尖っており, この尖りに対応したジョンソン SU 分布は逆転して適合度は良好となっている.

2008 年 11 月 18 日になると, ジョンソン SU 分布も双曲線正割分布もともに適合している.

イベント以前は正規分布に近似しているため, 正規分布が基本となるジョンソン SU 分布の適合度が高い. イベントの発生によりその影響を強く受けることにより, 中心が尖り, かつ, 裾が厚い分布へと変化していく. このため, 尖りに対応した双曲線正割分布の適合度が良好となっている. その後安定していくとジョンソン SU 分布も双曲線正割分布もともに適合度は良好となっていく.

リスクレベル低下局面において, 2009 年 10 月 5 日ではジョンソン SU 分布の方が適合度は高い.

2009 年 10 月 26 日では, 観測データから大きなプラス変動が抜けたため, ともに適合度は良くなる.

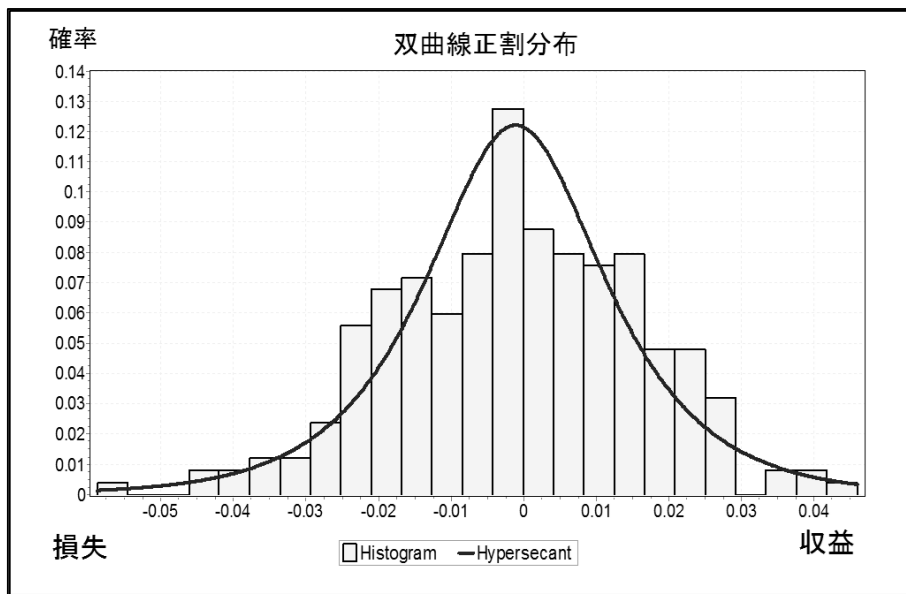
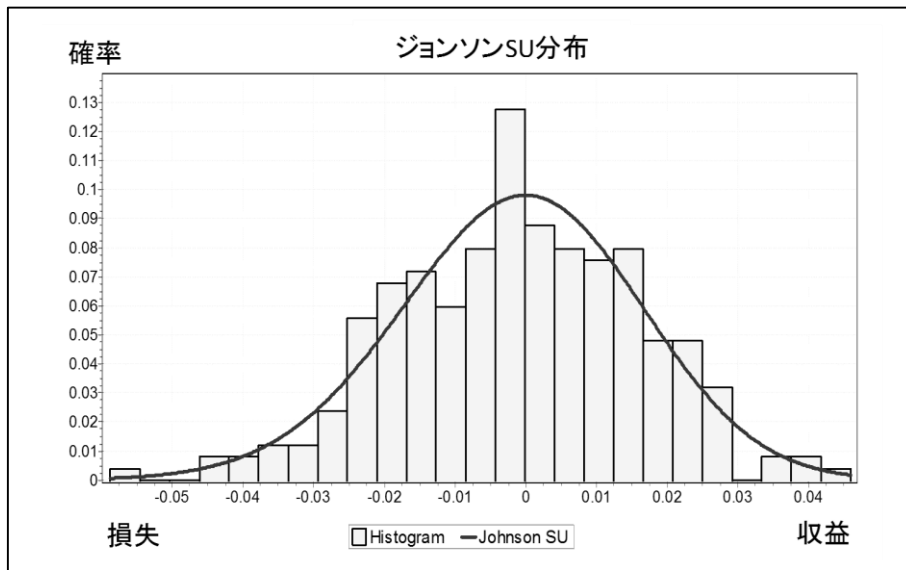
2009 年 11 月 12 日では, 観測データからマイナス変動も抜けたため, 両者乖離も少なくともに良好となっており, 逆転して双曲線正割分布の方が AD 統計量は低くなっている.

2009年12月22日では、さらに観測データからプラス変動・マイナス変動が抜けたためともに適合度は良好となっており、双曲線正割分布の方が少し低くなっている。

つまり、リスクレベル低下局面においては、当初はイベントの影響が残り、中心が尖り、かつ、裾が厚い分布となっているが、徐々に大きな変動データが抜け落ちるため正規分布に近似していくのがわかる。

《リスクレベル高騰局面》

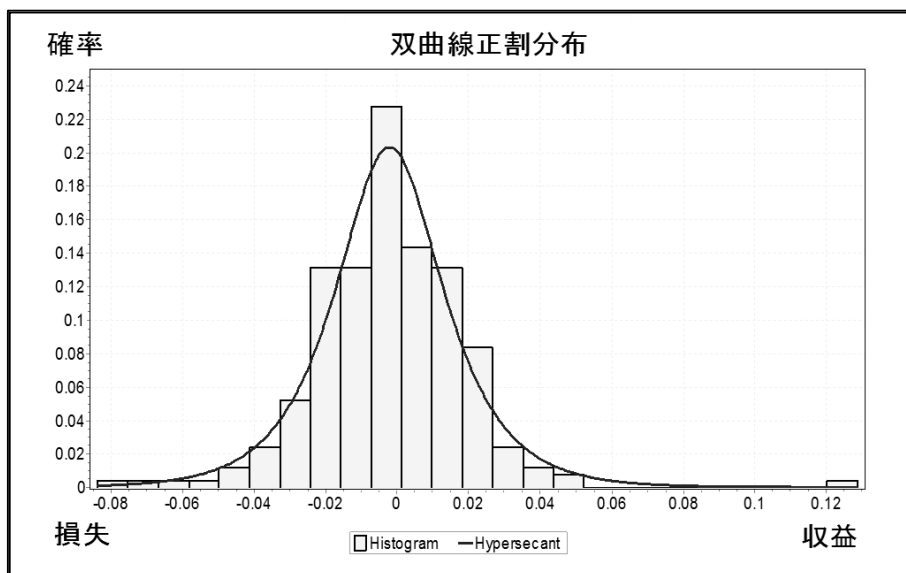
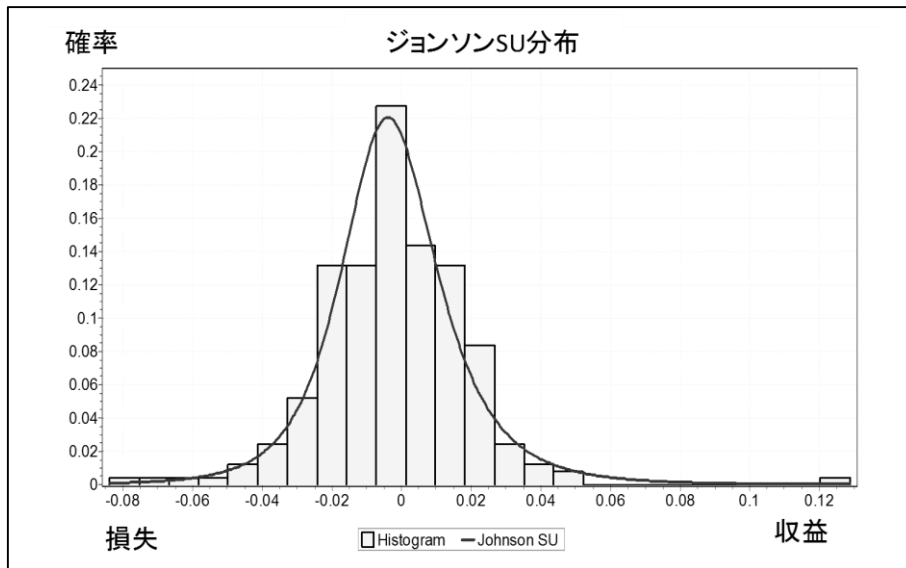
図 E-1 観測-仮定の分布比較 (2008年9月12日)



確率分布	AD統計量
Johnson SU	0.317
HSecant (Hypersecant)	1.511

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

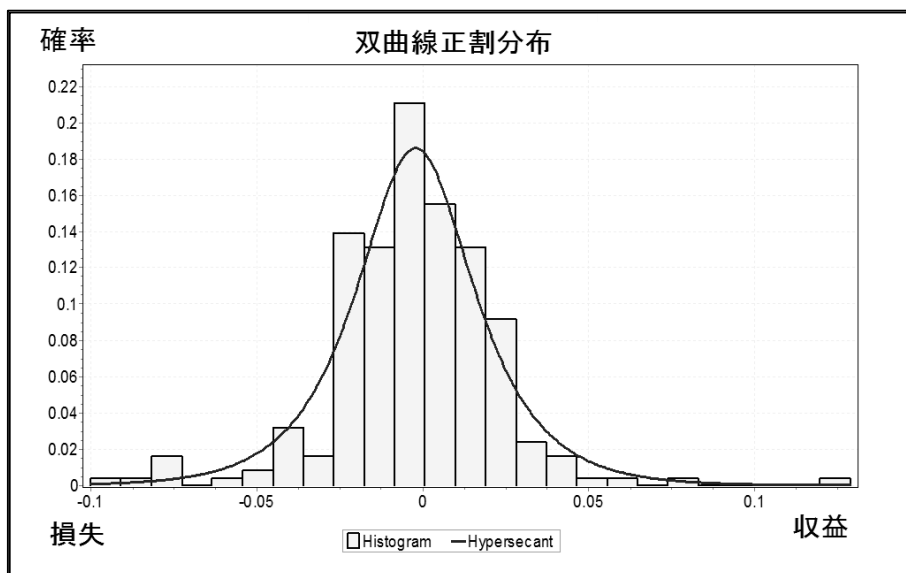
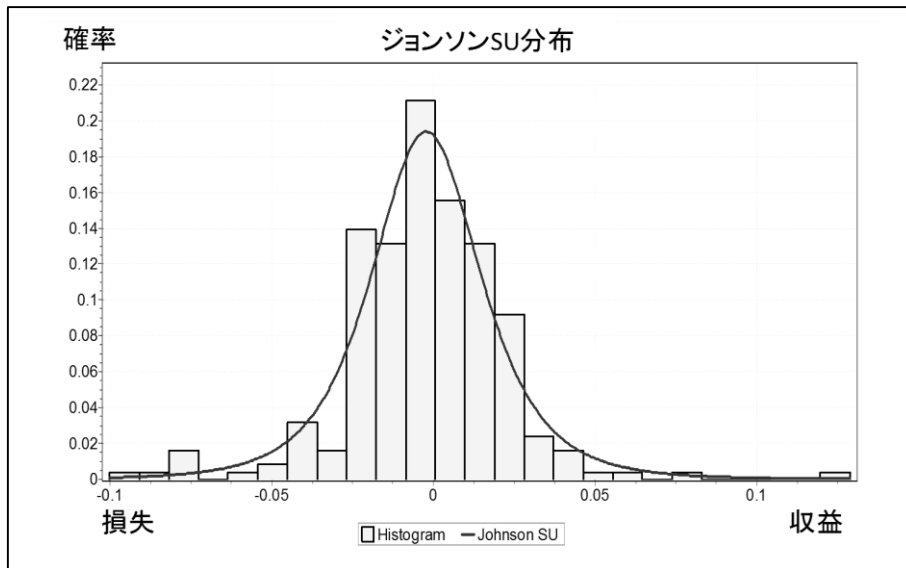
図 E-2 観測-仮定の分布比較 (2008年10月14日)



確率分布	AD統計量
HSecant (Hypersecant)	0.635
Johnson SU	1.279

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

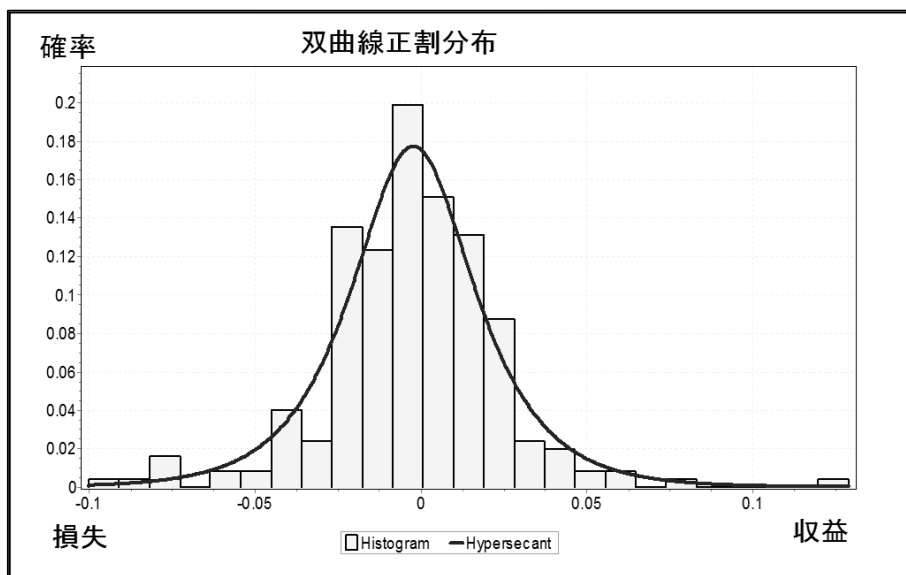
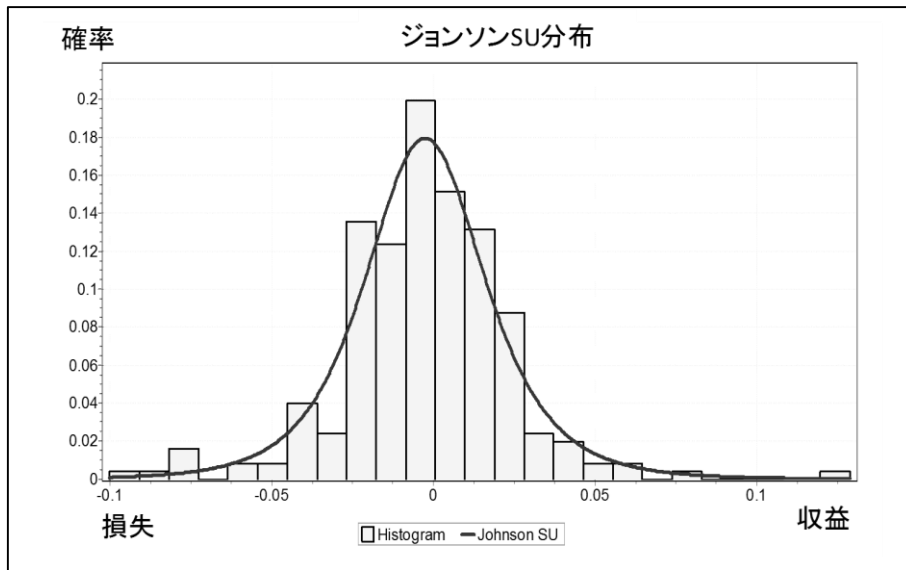
図 E-3 観測-仮定の分布比較 (2008年10月30日)



確率分布	AD統計量
Johnson SU	0.540
HSecant (Hypersecant)	0.758

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

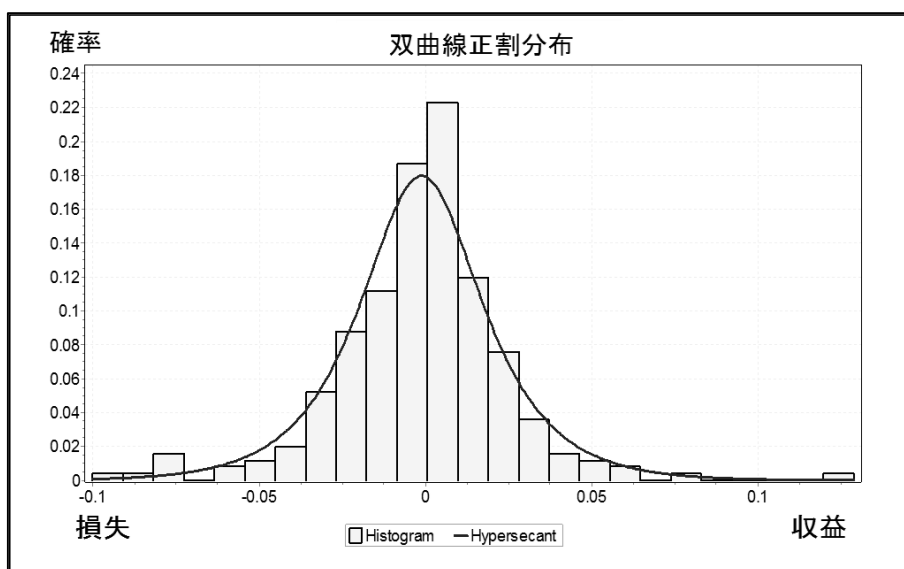
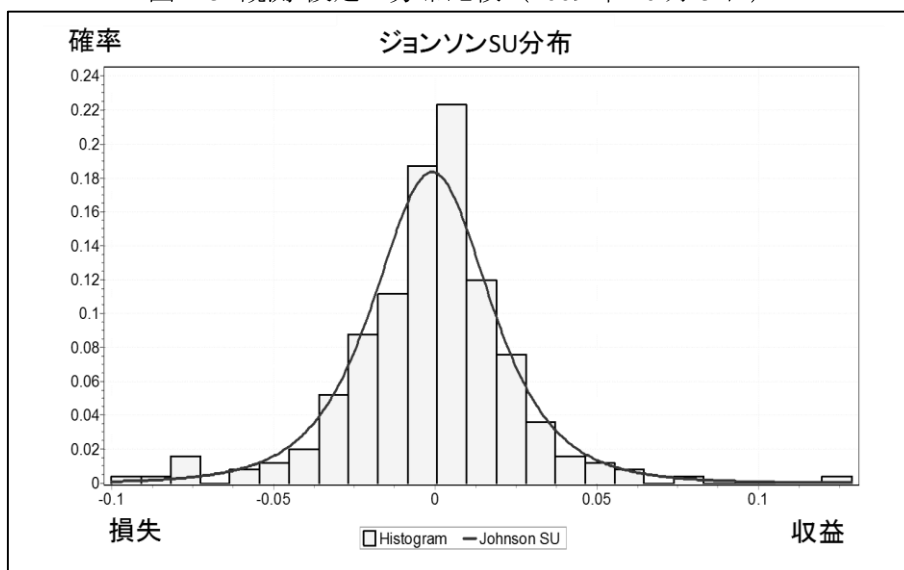
図 E-4 観測-仮定の分布比較 (2008年11月18日)



確率分布	AD統計量
Johnson SU	0.431
HSecant (Hypersecant)	0.527

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

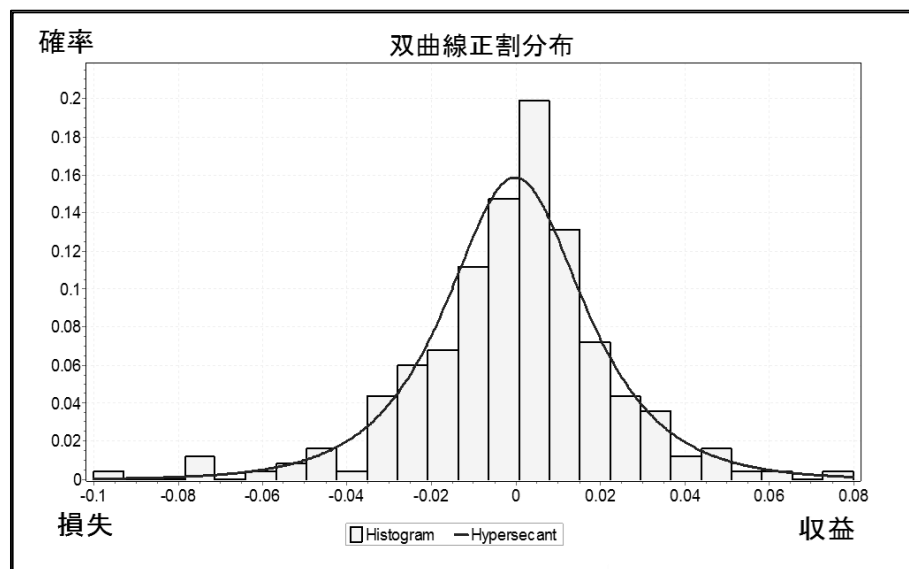
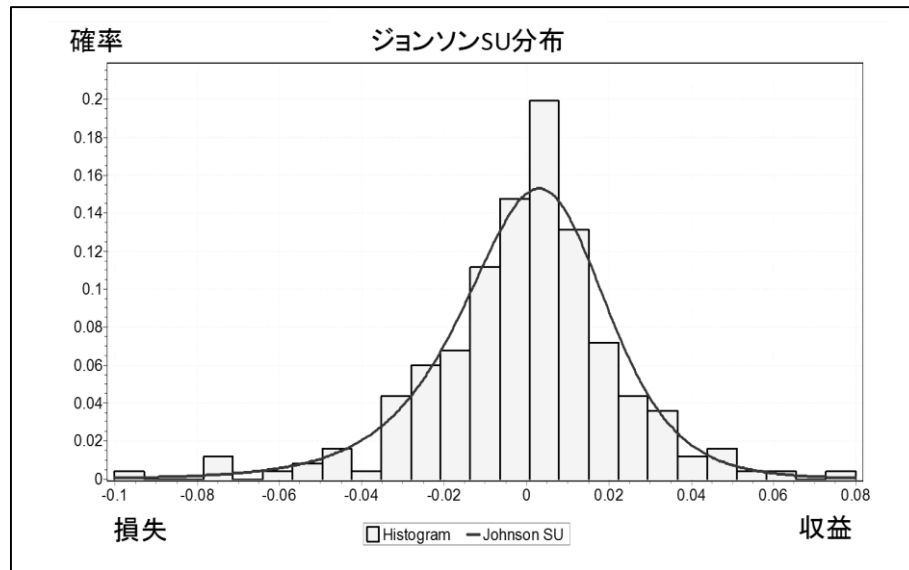
《リスクレベル低下局面》
 図 E-5 観測-仮定の分布比較 (2009年10月5日)



確率分布	AD統計量
Johnson SU	0.879
HSecant (Hypersecant)	1.157

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

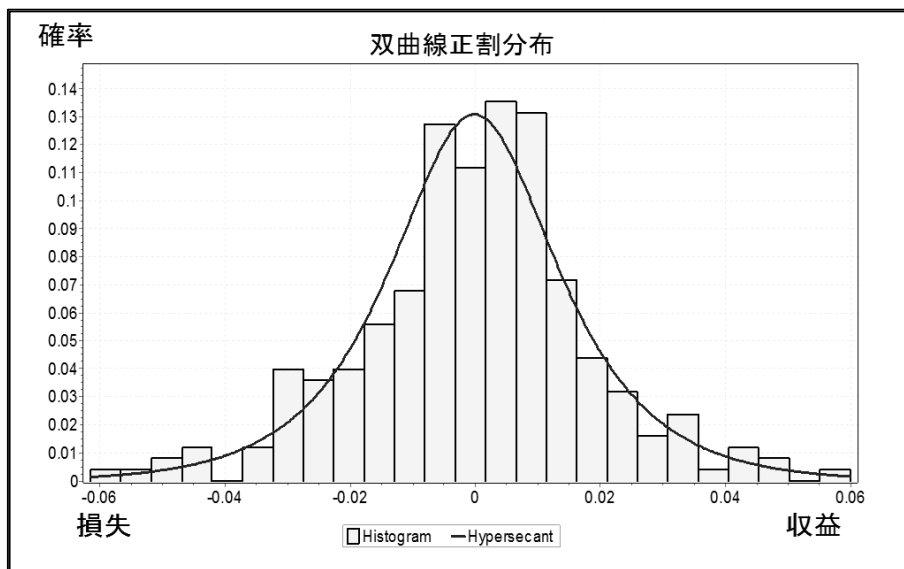
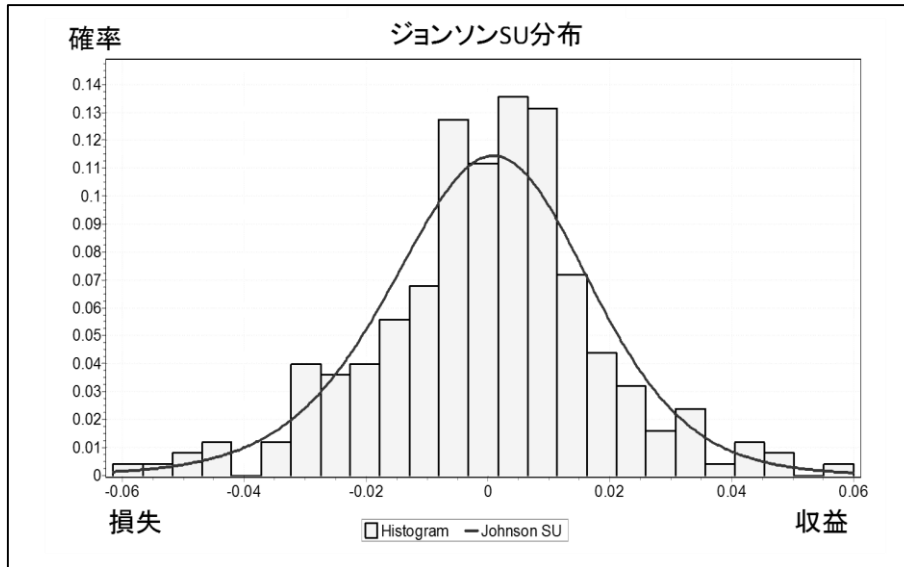
図 E-6 観測-仮定の分布比較 (2009年10月26日)



確率分布	AD統計量
Johnson SU	0.807
HSecant (Hypersecant)	0.985

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

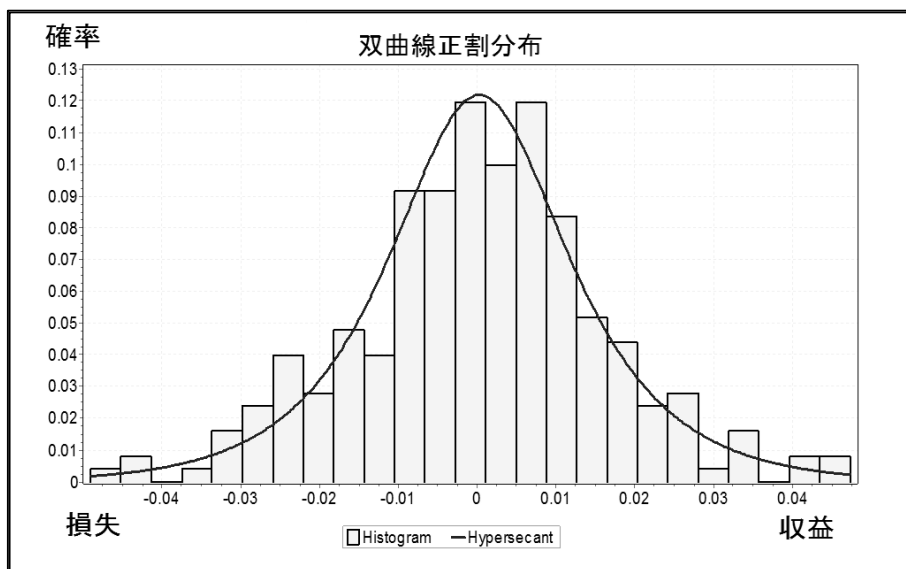
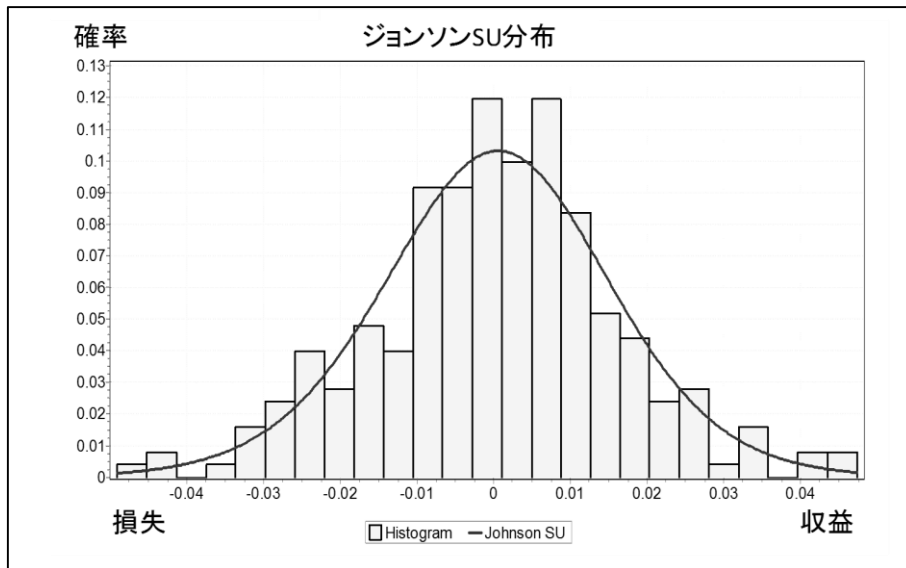
図 E-7 観測-仮定の分布比較 (2009 年 11 月 12 日)



確率分布	AD統計量
HSecant (Hypersecant)	0.497
Johnson SU	0.605

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

図 E-8 観測-仮定の分布比較 (2009年12月22日)



確率分布	AD統計量
HSecant (Hypersecant)	0.371
Johnson SU	0.479

(出所) TOPIX 収益率データをもとに筆者が作成.

第 4 章 保有期間を変化させることによる影響度分析

4.1 はじめに

本章の目的は、Value-at-Risk 推定において保有期間を変えることによって Value-at-Risk 推定値に対する影響を評価及び分析することにある。保有期間が 1 日である場合は、図 2-1、図 3-1 で示したように TOPIX 変化率（収益率）が 0 を中心に上下にバランス良くばらつきを示していることがわかる。ところが保有期間を 10 日あるいは 20 日と変化させるとそれぞれに特徴のある変化率の推移となり、保有期間 1 日の場合とは異なる形状となる。Value-at-Risk 推定値も保有期間 1 日の結果とは異なることが予想され、その影響度を考察・分析することが目的となる。

本章で扱うリスクファクターは価格変動リスクとし、株式指数 (TOPIX) とする。併せて実務で使われることが多い、保有期間 10 日（2 週間）と 20 日（1 か月）を採用し、保有期間 1 日のケースとの比較分析を実施する。現実の損失率の観測分布に適合する確率分布を特定し、かつ、ファットテイル性の問題を考慮しながら仮定する確率分布を決定するプロセスを提案する。

たとえば、分散共分散法を採用している場合、もし現実に大きなリスクファクター変動が起こったとしても、正規分布の仮定により、対応が困難である。分散共分散法では仮定する分布は「正規分布」であるため、現実の観測分布については、特に検証等を実施しなければ意識されることは少なくなる。一方、ヒストリカル法を採用している場合でも、観測分布の形状を意識することは少なくなりがちである。シンプルなヒストリカル法が使われるケースは実務的には少ないであろうが、シンプルなヒストリカル法であれば現実の観測分布のヒストグラムを確認する可能性はあろう。しかし、ヒストリカル・シミュレーションでは Value-at-Risk を直接的に決定するシミュレーション後の仮想ヒストリカル変動の分布に注目する。この方法では現実に起こった過去の観測分布に基づ

いて予測分布が推定されるものではなく、基準日時点の損益計算に基づいて予測分布がシミュレートされる。

本研究ではヒストリカル法の1つとされ、概念的にはデルタ法とほぼ同程度にわかりやすい、経験損失分布に1変量パラメトリック分布を当てはめる方法を扱う。ヒストリカル法の1つであるのでメリット・デメリットもヒストリカル法とほぼ同等であるが、パラメトリック分布を当てはめることが特徴的である。計測基準日における損失率分布の形状と基本統計量が判断材料となるので判定もしやすい。ヒストリカル・シミュレーションの説明に当てはめると、過去の観測分布に基づいて予測分布が推定されるものとなる。さらに、ファットテイル性の問題がある場合、ファットテイル性の程度を把握しておくことが重要となる。

日々の損失率の観測分布は設定する観測期間・保有期間やリスクファクターにより形状が大きく異なるため、基本分布群（正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布）やジョンソン分布群（SB分布・SU分布）がうまく適用できない可能性がある。そのため基本分布群やジョンソン分布群以外の確率分布を仮定することを検討しておく必要がある。その対応策として一般化極値分布、ワイブル分布（3パラメータ）及び一般化ロジスティック分布の3分布を取り上げる。

保有期間10日及び保有期間20日のValue-at-Risk推定においてそれぞれの保有期間の特徴を引き継ぎ、リーマン・ショックという大きなイベントを含む期間のリスク量推移をうまく表現できていることを確認する。また、バックテストでは、保有期間1日・保有期間10日及び保有期間20日の超過回数の実数比較をすることで、“3STEP-procedure”による分布選定の妥当性を示す。

本章の構成は以下のとおりである。4.2節では、本章におけるValue-at-Risk推定におけるパラメータと前提条件を設定する。4.3節では、確率分布の選択方法として“3STEP-procedure”を提案し、その手順に従い保有期間（1日・10日・20日）を変えて仮定する確率分布を選定し、Value-at-Risk推定の結果を示す。4.4節では、損益率の実現値とValue-at-Risk推定値との比較によるバックテストを実施してその適合度を確認する。4.5節では、前節までの評価・分析をもとに結論としてまとめる。

4.2 Value-at-Risk 推定の前提

本章ではヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を扱う。ポートフォリオのリスク計測であれば、日々の最終損益ベースで特定の確率分布を当てはめるものであり、適合度の高い確率分布が存在すれば推計値の精度は高くなる。また、パラメトリックな分布を当てはめることで、実際の損失率を超える予想値となる可能性もあり、さらにファットテイル性の問題への対応に重点を置けば Value-at-Risk 推定値における分位点が観測値による分位点より大きくなる場合もある。

Value-at-Risk 推定には、計測の前提として保有期間と信頼水準を設定する必要がある。保有期間 (holding period) はリスク評価期間 (risk horizon) であり、保有するポートフォリオ (資産及び負債) のリスク量を計測する期間を示している。本章では保有期間を 1 日・10 日・20 日とし、保有期間 10 日・20 日については、データのサンプル方法は重複を許す Moving-Window 法に依っている。また、信頼水準は一般的に使用されることが多い 99% とする。

次にリスクファクターの前提を決定しておく。本章ではリスクファクターを株式指数とし、TOPIX を使用する。評価期間は 2008 年 9 月 1 日より 2008 年 11 月 30 日までとし、Yahoo ファイナンスより取得した TOPIX を使用して算出する。なお、本章では分析をわかりやすくするために株式指数の変動リスクのみを対象とする。推定した Value-at-Risk 推定結果はパーセント表記しており、Value-at-Risk 推定結果を金額表示するには、基準日におけるエクスポージャーの金額に Value-at-Risk 推定結果を掛けることで計算すればよい。たとえば 2008 年 10 月 1 日を例にとると、Normal-VaR (正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定値) は 4.250565% となっているので、その日のエクスポージャーの金額がたとえば 1 億円とすれば $1 \text{ 億円} \times 4.250565\%$ で計算でき、10 月 1 日の Normal-VaR の金額は 4,250,565 円となる。また、Logistic-VaR (ロジスティック分布を仮定した Value-at-Risk 推定値) は 4.494408% となっているので、その日のエクスポージャーの金

額がたとえば1億円とすれば1億円×4.494408%で計算でき、10月1日のLogistic-VaRの金額は4,494,408円となる。

その他の前提として、リスクファクターの変動は対数収益率及び対数損失率とし、Value-at-Risk推定については対数損失率で表記し、その他の分析については対数収益率で表記する。観測期間は251日（1年相当）とする。パラメータ推計については、推定する分布に応じてモーメント法または最尤法を採用しており、特にジョンソンSU分布のパラメータ推計についてはTuenter [2001]のモーメント法に依っている。

4.3 適合度の高い確率分布の選択

確率分布の選択方法については、事前に選定しておいた確率分布より合理的に判定し選択する方法を採る。本章ではその選定基準として“3STEP-procedure”を提案する。また、事前に選定した確率分布として以下の9分布を採用する。正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布の4分布を「基本分布群」と呼び、ジョンソンSU分布とジョンソンSB分布の2分布を「ジョンソン分布群」と呼ぶ。この「基本分布群」と「ジョンソン分布群」を基礎的な確率分布とする。また、保有期間1日に比べ歪んだ分布が予想されることから、保有期間10日及び20日に対応させるため、一般化ロジスティック分布（GL:generalized logistic distribution）、一般化極値分布（GEV:generalized extreme value distribution）及びワイブル分布（W3P:weibull distribution）の3分布を新たに追加し、「拡張分布群」と呼ぶ。分析対象とする観測日は、まず大きな変動が発生する前の「低位安定期」として、2008年9月10日・11日・12日の3日間を抽出する。次に大きな変動の発生日を含む「変動期」として、2008年10月14日・15日・16日の3日間を抽出する。最後に大きな変動の発生後、1か月程度経過して安定を取り戻した「高位安定期」として、2008年11月26日・27日・28日の3日間を抽出する。

4.3.1 3STEP-procedure

“3STEP-procedure”の概略を述べる。仮定する確率分布を選択するプロセスを事前に決めておくことにより、合理的に観測分布に適合する確率分布を判定し選択できる方法であり、恣意性の排除を目的としている。文字通り“3STEP-procedure”には3つのステップがある。

まず、STEP1では適合性の検定（アンダーソン-ダーリング検定）を用い、統計検定量を基準として適合度の高い複数の確率分布を抽出する。次に、STEP2ではファットテイル判定により観測値からの乖離幅が小さくなる確率分布を1~3個程度を抽出する。次に、STEP3では上記の2つのSTEPから得られた複数の確率分布より最終的に採用する確率分布を決定する。本章ではファットテイル性の問題がより少なくなるような確率分布を選択することを優先する。その後、実際にValue-at-Risk推定値を計算した上で、Value-at-Risk推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮して、適用する確率分布を確定する。

STEP1：適合度判定

代表的な適合性の検定の1つである、アンダーソン-ダーリング検定を用い、適合度の高い確率分布を抽出する。アンダーソン-ダーリング検定の統計検定量 A^2 を以下に示す。具体的には $\alpha=0.2$ の時の基準値 1.3749 を超過しない確率分布を選択し、適合度の高い確率分布から順番に表記している。STEP1の結果として5~7個の分布を抽出する。現実的には、STEP1では適合度の低い確率分布を除外するプロセスとなっており、ここではじかれた確率分布はSTEP2では抽出しない。

アンダーソン-ダーリング検定

帰無仮説 H_0 : データは特定した確率分布に従う。

対立仮説 H_1 : データは特定した確率分布に従わない。

統計検定量 : A^2

$$A^2 = - \sum_{i=1}^n \left[(2i - 1) \frac{\log p_i - \log (1 - p_{n+1-i})}{n} \right] - n$$

$$\text{修正統計量 } A^* = A^2 \left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

※第3章 Appendix D を参照.

STEP2 : ファットテイル判定

ファットテイル判定では、観測値からの乖離幅が小さくなる確率分布を選定することを基本とする。しかしながら「低位安定期」においては、ファットテイル性の問題に抵触しない確率分布を選択するという条件を付ける。なぜならば、「低位安定期」以外の時期については、ほとんどの時期でファットテイル性の問題の影響を受けてしまうからである。少なくとも「低位安定期」だけは、影響を受けずに近似できる非正規分布が存在する限り、その影響を受けずに近似できる非正規分布を仮定することが望ましい。ここでは STEP2 の結果として 1~3 個の分布を抽出する。

※表 4-1, 表 4-2, 表 4-3 の「ファットテイル判定」の表記については、以下の通り。

○ : ファットテイル性の問題の影響を受けていない

FT : ファットテイル性の問題の影響を受けている

STEP3 : 優先度判定

STEP1 と STEP2 の各結果より、いずれの結果を優先するかを考慮して最終的に採用する確率分布を決定する。本章ではファットテイル性の問題を優先することとし、STEP2 での結果を重視する。

ここで懸念されるのは、選定した確率分布に変更したことが唯一の原因となって、標準偏差等の値の変化から類推可能な変動の方向性とは逆向きの方へ変動してしまうという、稀に生じうる事象が起こることである。

ファットテイル性の問題に抵触する「変動期」と「高位安定期」については、その影響度を算出して示す。さらに Value-at-Risk 推定を実施して、上記に示したような Value-at-Risk 推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮した上で適用する確率分布を確定する。

4.3.2 保有期間1日の分布選択

前項において説明した“3STEP-procedure”に従い、保有期間1日の分布選択における各STEPの結果を示す。表中における確率分布の略記については、

- HSecant : 双曲線正割分布,
- SB : ジョンソン SB 分布,
- SU : ジョンソン SU 分布,
- GL : 一般化ロジスティック分布,
- GEV : 一般化極値分布,
- W3P : ワイブル分布 (3パラメータ) とする.

表 4-1 3STEP-procedure

(保有期間：1日)

STEP1						
計測基準日	第1順位	第2順位	第3順位	第4順位	第5順位	第6順位
2008/9/10	Normal	SU	GEV	W3P	GL	Logistic
2008/9/11	SU	Normal	GEV	W3P	GL	Logistic
2008/9/12	SU	Normal	GEV	W3P	GL	Logistic
2008/10/14	GL	Logistic	HSecant			
2008/10/15	GL	Logistic	HSecant			
2008/10/16	GL	HSecant	Logistic	SU		
2008/11/26	SU	GL	HSecant	Laplace	Logistic	
2008/11/27	SU	GL	HSecant	Laplace	Logistic	
2008/11/28	SU	GL	HSecant	Laplace	Logistic	

STEP2					
計測基準日	ファットテイル判定	第1順位	99%分位点	第2順位	99%分位点
2008/9/10	○	Logistic	-4.448%	W3P	-4.200%
2008/9/11	○	Logistic	-4.468%	W3P	-4.205%
2008/9/12	○	Logistic	-4.457%	W3P	-4.212%
2008/10/14	FT	HSecant	-5.748%		
2008/10/15	FT	HSecant	-5.748%		
2008/10/16	FT	SU	-6.089%	HSecant	-6.024%
2008/11/26	FT	Laplace	-7.445%		
2008/11/27	FT	Laplace	-7.432%		
2008/11/28	FT	Laplace	-7.426%		

STEP3			
計測基準日	観測値	選定分布	影響度
2008/9/10	-4.302%	Logistic	—
2008/9/11	-4.302%	Logistic	—
2008/9/12	-4.302%	Logistic	—
2008/10/14	-5.873%	HSecant	0.125%
2008/10/15	-5.873%	HSecant	0.125%
2008/10/16	-7.363%	SU	1.274%
2008/11/26	-7.823%	Laplace	0.378%
2008/11/27	-7.823%	Laplace	0.391%
2008/11/28	-7.823%	Laplace	0.397%

(出所) 筆者作成

表 4-1 3STEP-procedure (保有期間: 1 日) において, たとえば 2008 年 9 月 10 日を例にとると, STEP1 では適合性の検定により正規分布, ジョンソン SU 分布, 一般化極値分布, ワイブル分布 (3 パラメータ), 一般化ロジスティック分布, ロジスティック分布の 6 分布が抽出されている. 次いで STEP2 ではファットテイル判定によりロジスティック分布とワイブル分布が抽出され, 右に各分布の 99%分位点¹を表示している. 最後に STEP3 では, STEP1 と STEP2 の選定結果を考慮し, 観測値と比較して絶対値の小さい確率分布を基準として, ファットテイル性の問題の少ない確率分布を有効と判定している. その結果, 2008 年 9 月 10 日における最終結果は, ロジスティック分布となった. ロジスティック分布は STEP2 のファットテイル判定を確認すれば, 「○: ファットテイル性の問題の影響を受けていない」表示になっており, STEP2 ファットテイル判定の条件をクリアできている. つまり, ロジスティック分布はファットテイル性の問題に抵触していない確率分布であるため, 影響度の項目は「—」を表示している.

同様にして, 2008 年 10 月 14 日での最終結果は, 双曲線正割分布となった. 双曲線正割分布は STEP2 のファットテイル判定を確認すれば, 「FT: ファットテイル性の問題の影響を受けている」表示になっている. つまりファットテイル性の問題に抵触している確率分布であるため, 影響度の項目にはその乖離幅「0.125%」を表示している.

最後に 2008 年 11 月 26 日での最終結果は, ラプラス分布となった. ラプラス分布は STEP2 のファットテイル判定を確認すれば, 「FT」表示になっている. つまりファットテイル性の問題に抵触している確率分布であるため, 影響度の項目にはその乖離幅「0.378%」を表示している.

ここではさらなる確率分布の比較分析として、累積分布関数と Probability Difference の図による分析を活用しており、詳細については第 4 章 Appendix G に示した。

4.3.3 保有期間 10 日の分布選択

“3STEP-procedure” に従い、保有期間 10 日の分布選択における各 STEP での結果を示す。

表 4-2 3STEP-procedure

(保有期間：10日)

STEP1						
計測基準日	第1順位	第2順位	第3順位	第4順位	第5順位	第6順位
2008/9/10	GEV	Normal	SB	W3P	GL	Logistic
2008/9/11	GEV	Normal	SB	W3P	GL	Logistic
2008/9/12	GEV	Normal	SB	W3P	GL	Logistic
2008/10/14	GL	HSecant	SU			
2008/10/15	GL	SU	HSecant			
2008/10/16	GL	SU				
2008/11/26	GL	SU				
2008/11/27	GL	SU				
2008/11/28	GL	SU				

STEP2					
計測基準日	ファットテイル判定	第1順位	99%分位点	第2順位	99%分位点
2008/9/10	○	Logistic	-12.953%		
2008/9/11	○	Logistic	-12.984%		
2008/9/12	○	Logistic	-13.038%		
2008/10/14	FT	SU	-19.774%	GL	-18.539%
2008/10/15	FT	SU	-19.878%	GL	-18.782%
2008/10/16	FT	SU	-20.687%	GL	-19.715%
2008/11/26	FT	GL	-21.947%	SU	-21.837%
2008/11/27	FT	GL	-21.885%	SU	-21.822%
2008/11/28	FT	GL	-21.892%	SU	-21.818%

STEP3			
計測基準日	観測値	選定分布	影響度
2008/9/10	-11.992%	Logistic	—
2008/9/11	-11.992%	Logistic	—
2008/9/12	-11.992%	Logistic	—
2008/10/14	-24.289%	SU	4.515%
2008/10/15	-24.289%	SU	4.411%
2008/10/16	-24.289%	SU	3.602%
2008/11/26	-24.289%	GL	2.342%
2008/11/27	-24.289%	GL	2.404%
2008/11/28	-24.289%	GL	2.397%

(出所) 筆者作成

表 4-2 3STEP-procedure (保有期間：10 日) において、たとえば 2008 年 9 月 10 日を例として “3STEP-procedure” に基づいて判定する。まず STEP1 では適合性の検定により一般化極値分布，正規分布，ジョンソン SB 分布，ワイブル分布 (3 パラメータ)，一般化ロジスティック分布，ロジスティック分布の 6 分布が選定されている。次に STEP2 では，ファットテイル判定によりジョンソン SB 分布とワイブル分布 (3 パラメータ) が選定されている。しかしながら，この 2 つの確率分布はファットテイル性の問題に抵触する確率分布に該当するため，「低位安定期」においてはファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布を選択するという条件に当てはまらない。そこでファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布であるロジスティック分布が再選定される。最後に STEP3 では，2008 年 9 月 10 日における最終結果はロジスティック分布となる。

同様にして，2008 年 10 月 14 日での最終結果は，ジョンソン SU 分布となり，2008 年 11 月 26 日での最終結果は，一般化ロジスティック分布となる。

4.3.4 保有期間 20 日の分布選択

“3STEP-procedure” に従い，保有期間 20 日の分布選択における各 STEP での結果を示す。

表 4-3 3STEP-procedure

(保有期間：20日)

STEP1					
計測基準日	第1順位	第2順位	第3順位	第4順位	第5順位
2008/9/10	SB	GEV	W3P	Normal	
2008/9/11	SB	GEV	W3P	Normal	
2008/9/12	SB	GEV	W3P	Normal	
2008/10/14	GEV	Normal	GL		
2008/10/15	GEV	Normal	GL	W3P	SU
2008/10/16	GL	SU			
2008/11/26	GL	SU			
2008/11/27	GL	SU			
2008/11/28	GL	SU			

STEP2			
計測基準日	ファットテイル判定	第1順位	99%分位点
2008/9/10	○	GEV	-16.698%
2008/9/11	○	GEV	-16.694%
2008/9/12	○	GEV	-16.693%
2008/10/14	FT	GL	-23.826%
2008/10/15	FT	GL	-24.257%
2008/10/16	FT	GL	-24.957%
2008/11/26	FT	GL	-33.670%
2008/11/27	FT	GL	-33.819%
2008/11/28	FT	GL	-33.949%

STEP3			
計測基準日	観測値	選定分布	影響度
2008/9/10	-16.202%	GEV	—
2008/9/11	-16.202%	GEV	—
2008/9/12	-16.202%	GEV	—
2008/10/14	-27.499%	GL	3.673%
2008/10/15	-27.499%	GL	3.242%
2008/10/16	-27.499%	GL	2.542%
2008/11/26	-35.873%	GL	2.203%
2008/11/27	-35.873%	GL	2.054%
2008/11/28	-35.873%	GL	1.924%

(出所) 筆者作成

表 4-3 3STEP-procedure（保有期間：20 日）においては、たとえば 2008 年 9 月 10 日を例として“3STEP-procedure”に基づいて判定する。まず STEP1 では、適合性の検定によりジョンソン SB 分布、一般化極値分布、ワイブル分布（3 パラメータ）、正規分布の 4 分布が選定されている。次に STEP2 では、ファットテイル判定により一般化極値分布が選定されている。一般化極値分布はファットテイル性の問題に抵触していないため、STEP3 でも選定される。2008 年 9 月 10 日における最終結果は、一般化極値分布となる。

同様にして、2008 年 10 月 14 日での最終結果は、一般化ロジスティック分布となり、2008 年 11 月 26 日での最終結果も、一般化ロジスティック分布となる。

4.4 結果分析と検証

現実の損失率の観測分布を概観すると、保有期間 1 日では「0」を中心とした左右対称に近い確率分布が多く現れるのが特徴的であるが、保有期間 10 日と保有期間 20 日での損失率の観測分布はマイナスに歪んだ確率分布形状となることが大きな特徴となっている。しかも保有期間が長いほど観測分布の標準偏差（ばらつき）が大きくなる傾向がある。なお、保有期間 1 日における左右対称に近い観測分布では、歪度の符号がプラスからマイナスへ、マイナスからプラスへと変わることによってジョンソン SU 分布を仮定した Value-at-Risk 推定値に大きく影響を及ぼしたが、保有期間 10 日と保有期間 20 日では観測分布に歪みがあることから、上記に示したような大きな変動は生じていない。

次に、新たに追加した「拡張分布群」である一般化極値分布、ワイブル分布及び一般化ロジスティック分布の 3 分布の特徴を示しておく。一般化極値分布とワイブル分布は正規分布に近い形状の時、つまり「低位安定期」において当てはまりが良いことがわかる。一方、一般化ロジスティック分布は全般に適合度は高いが、「低位安定期」では 99% 分位点の値が大きくなりすぎるため STEP2 で除外される可能性が高くなる。逆に、保有期間 10 日と保有期間 20 日における「変動期」及び「高位安定期」においては、最終的に一般化ロジスティック分布が適用される頻度が高くなる。

最後に、ジョンソン SU 分布では、たとえば尖度が 3 より小さくなると計算が不能となる場合があるが、この時にはジョンソン SB 分布の計算ができることがわかった。本章ではジョンソン SU 分布とジョンソン SB 分布を一括りにして「ジョンソン分布群」と呼んでいる。ジョンソン SU 分布は急尖的 (leptokurtic) な確率分布であり、一般化ロジスティック分布同様、イベント発生後の「変動期」以降に適している。一方、ジョンソン SB 分布は一般化極値分布やワイブル分布と同様に、値がばらつくような尖度の低い確率分布に適している。

さらに、モデルの検証として損失率の実現値と推定した Value-at-Risk 値との比較によるバックテストを実施する。保有期間 1 日では第 2 章で実施したバックテストと同様に、バーゼル銀行監督委員会が規定した「トレーディング勘定のバックテストのフレームワーク」を利用した方法によりバックテストを実施する。評価期間を 250 営業日とし 2009 年 9 月 1 日を基準としてそこから 250 日分、前に遡って評価期間を抽出している。一方、保有期間 10 日・20 日では上記の方法の前提に当てはまらないため、評価期間を 60 営業日とし 2008 年 12 月 1 日を基準としてそこから 60 日分、前に遡って抽出した上で、単純に損失率の実現値と推定した Value-at-Risk 値とを比較して超過回数の実数を調べて比較する。

4.4.1 結果の分析

“3STEP-procedure”により選定した確率分布を保有期間別に、表 4-4~4-6 に示す。

表 4-4 3STEP-procedure により選定した確率分布

(保有期間：1 日)

3STEP-procedureにより選定した分布					
2008/9/1	Logistic	2008/10/1	Logistic	2008/11/4	Laplace
2008/9/2	Logistic	2008/10/2	Logistic	2008/11/5	Laplace
2008/9/3	Logistic	2008/10/3	Logistic	2008/11/6	Laplace
2008/9/4	Logistic	2008/10/6	Logistic	2008/11/7	Laplace
2008/9/5	Logistic	2008/10/7	Logistic	2008/11/10	Laplace
2008/9/8	Logistic	2008/10/8	HSecant	2008/11/11	Laplace
2008/9/9	Logistic	2008/10/9	HSecant	2008/11/12	Laplace
2008/9/10	Logistic	2008/10/10	HSecant	2008/11/13	Laplace
2008/9/11	Logistic	2008/10/14	HSecant	2008/11/14	Laplace
2008/9/12	Logistic	2008/10/15	HSecant	2008/11/17	Laplace
2008/9/16	Logistic	2008/10/16	SU	2008/11/18	Laplace
2008/9/17	Logistic	2008/10/17	SU	2008/11/19	Laplace
2008/9/18	Logistic	2008/10/20	SU	2008/11/20	Laplace
2008/9/19	Logistic	2008/10/21	SU	2008/11/21	Laplace
2008/9/22	Logistic	2008/10/22	SU	2008/11/25	Laplace
2008/9/24	Logistic	2008/10/23	SU	2008/11/26	Laplace
2008/9/25	Logistic	2008/10/24	SU	2008/11/27	Laplace
2008/9/26	Logistic	2008/10/27	SU	2008/11/28	Laplace
2008/9/29	Logistic	2008/10/28	SU		
2008/9/30	Logistic	2008/10/29	SU		
		2008/10/30	Laplace		
		2008/10/31	Laplace		

(出所) 筆者作成

表 4-4 3STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間：1 日) においては、「低位安定期」ではロジスティック分布、「変動期」ではジョンソン SU 分布、「高位安定期」ではラプラス分布となり、第 3 章 3.4.2 分布特性に適合したリスクフェーズ区分²で設定した基本パターンとは多少異なる結果となっている。しかしながら、イベント日である 2008 年 10 月 14 日では双曲線正割分布が選択されており、ジョンソン SU 分布・ラプラス分布・双曲線正割分布の 3 分布における分位点の乖離は小さい。

また、2008 年 10 月 30 日は、歪度の符号が反転するという事象が発生している観測日であり、観測分布の形状の変換点となる。他の確率分布の方が適合性の検定では当てはまりは良いが、ファットテイル判定により乖離が小さいラプラス分布を最終的に選択している。

表 4-5 3STEP-procedure により選定した確率分布
(保有期間：10 日)

3STEP-procedureにより選定した分布					
2008/9/1	Logistic	2008/10/1	Logistic	2008/11/4	GL
2008/9/2	Logistic	2008/10/2	Logistic	2008/11/5	GL
2008/9/3	Logistic	2008/10/3	Logistic	2008/11/6	SU
2008/9/4	Logistic	2008/10/6	GL	2008/11/7	SU
2008/9/5	Logistic	2008/10/7	GL	2008/11/10	SU
2008/9/8	Logistic	2008/10/8	GL	2008/11/11	SU
2008/9/9	Logistic	2008/10/9	SU	2008/11/12	SU
2008/9/10	Logistic	2008/10/10	SU	2008/11/13	SU
2008/9/11	Logistic	2008/10/14	SU	2008/11/14	SU
2008/9/12	Logistic	2008/10/15	SU	2008/11/17	SU
2008/9/16	Logistic	2008/10/16	SU	2008/11/18	SU
2008/9/17	Logistic	2008/10/17	SU	2008/11/19	SU
2008/9/18	Logistic	2008/10/20	SU	2008/11/20	SU
2008/9/19	Logistic	2008/10/21	SU	2008/11/21	SU
2008/9/22	Logistic	2008/10/22	SU	2008/11/25	SU
2008/9/24	Logistic	2008/10/23	SU	2008/11/26	SU
2008/9/25	Logistic	2008/10/24	SU	2008/11/27	SU
2008/9/26	Logistic	2008/10/27	SU	2008/11/28	SU
2008/9/29	Logistic	2008/10/28	SU		
2008/9/30	Logistic	2008/10/29	GL		
		2008/10/30	GL		
		2008/10/31	GL		

(出所) 筆者作成

※ 色付きになっている 2008 年 9 月 1 日から 2008 年 10 月 3 日については, STEP2 の条件にかかり, 「低位安定期」においてはファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布を選択するものとし, 最終的に『ロジスティック分布』を選択している.

表 4-5 3STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間: 10 日) においては, 「低位安定期」ではロジスティック分布, 「変動期」ではジョンソン SU 分布と一般化ロジスティック分布, 「高位安定期」ではジョンソン SU 分布となっている. 2008 年 10 月 8 日~10 月 10 日の 3 日間では歪度と尖度の変化が大きく, 保有期間 1 日のような歪度の符号が反転するという事象は発生していないものの, 特に歪度の変動は大きくなっている. また, 尖度についても 10 月 6 日以前までは 3 未満であったものが大きく変動し,

10月8日では4.58, 10月10日では7.17となり, この評価期間において最大値となった.

表 4-6 3STEP-procedure により選定した確率分布

(保有期間: 20日)

3STEP-procedureにより選定した分布					
2008/9/1	Normal	2008/10/1	Normal	2008/11/4	GL
2008/9/2	GEV	2008/10/2	Normal	2008/11/5	GL
2008/9/3	GEV	2008/10/3	Normal	2008/11/6	GL
2008/9/4	GEV	2008/10/6	Normal	2008/11/7	GL
2008/9/5	GEV	2008/10/7	Normal	2008/11/10	GL
2008/9/8	GEV	2008/10/8	W3P	2008/11/11	GL
2008/9/9	GEV	2008/10/9	W3P	2008/11/12	GL
2008/9/10	GEV	2008/10/10	SU	2008/11/13	GL
2008/9/11	GEV	2008/10/14	SU	2008/11/14	GL
2008/9/12	GEV	2008/10/15	GL	2008/11/17	GL
2008/9/16	GEV	2008/10/16	GL	2008/11/18	GL
2008/9/17	GEV	2008/10/17	GL	2008/11/19	GL
2008/9/18	GEV	2008/10/20	GL	2008/11/20	GL
2008/9/19	GEV	2008/10/21	GL	2008/11/21	GL
2008/9/22	GEV	2008/10/22	GL	2008/11/25	GL
2008/9/24	GEV	2008/10/23	GL	2008/11/26	GL
2008/9/25	Normal	2008/10/24	GL	2008/11/27	GL
2008/9/26	Normal	2008/10/27	GL	2008/11/28	GL
2008/9/29	Normal	2008/10/28	GL		
2008/9/30	Normal	2008/10/29	GL		
		2008/10/30	GL		
		2008/10/31	GL		

(出所) 筆者作成

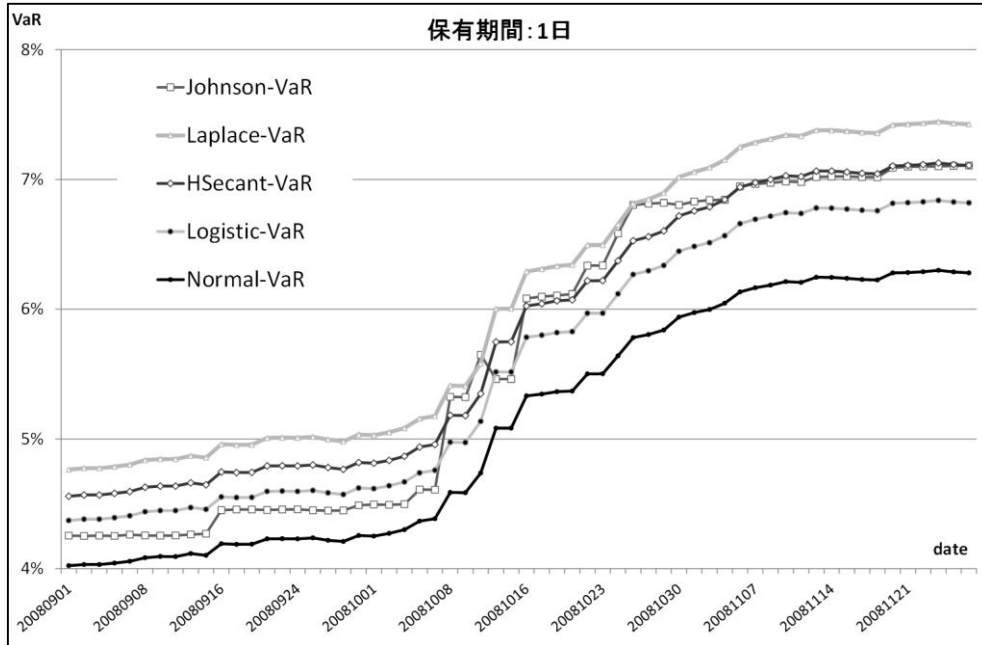
表 4-6 3STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間: 20日) においては, 「低位安定期」は一般化極値分布と正規分布, 「変動期」では一般化ロジスティック分布, 「高位安定期」も一般化ロジスティック分布となっている.

2008年10月8日~10月10日の3日間では歪度と尖度の変化が大きくなっている. また, 2008年10月24日~10月28日の3日間でも歪度と尖度の変化が大きくなっている. 尖度については10月7日時点では2.38であったが, 10月28日では5.78となり, この評価期間において最大値となった.

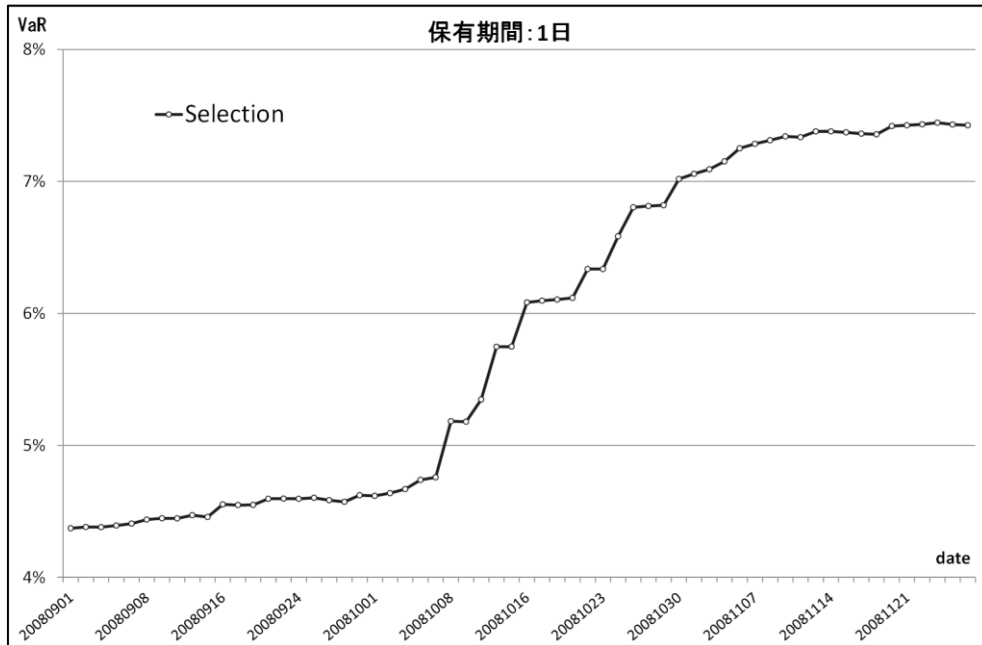
次に Value-at-Risk 推定を実施してその結果を図 4.1～4.3 に示す。図 4.1 は保有期間 1 日, 図 4.2 は保有期間 10 日, 図 4.3 は保有期間 20 日の Value-at-Risk 推定の結果である。なお, 図中での略記については各図に示す。

図 4-1 Value-at-Risk 推定 (保有期間: 1 日)

- Johnson-VaR : ジョンソン SU 分布を仮定
- Laplace-VaR : ラプラス分布を仮定
- HSecant-VaR : 双曲線正割分布を仮定
- Logistic-VaR : ロジスティック分布を仮定
- Normal-VaR : 正規分布を仮定



“Selection”による Value-at-Risk 推定



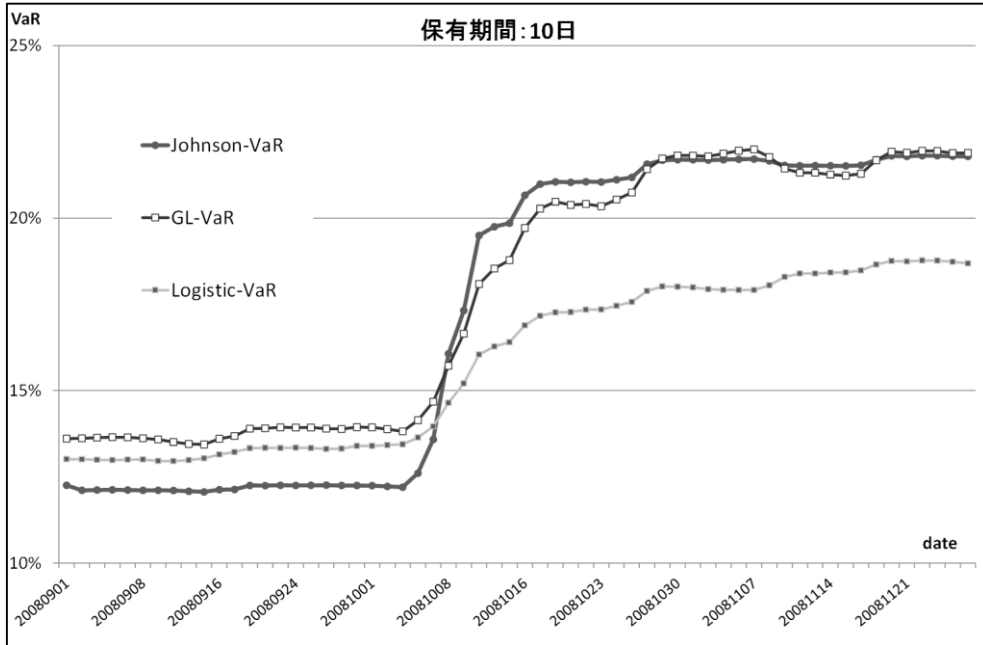
(出所) 筆者作成

図 4-1 の上図において Logistic-VaR・HSecant-VaR・Laplace-VaR の 3 つの VaR は比例的に推移しており、リーマン・ショックという大きなイベント前後をうまく表現できている。一方、Johnson-VaR ではイベント発生となる 2008 年 10 月 8 日と 2008 年 10 月 16 日に大きくジャンプするという特徴がある。数値としては 2008 年 10 月 8 日では 0.7% 上昇、2008 年 10 月 16 日では 0.6% 上昇、と急騰している。これは大きなマイナス変動 (-8.38%, -10.00%) が生じることにより、分布形状が大きく変化することが原因である。他の VaR でも後からは Johnson-VaR と同程度、さらにそれ以上となることから、Johnson-VaR の推移は事前予測の手段として利用できる可能性がある。

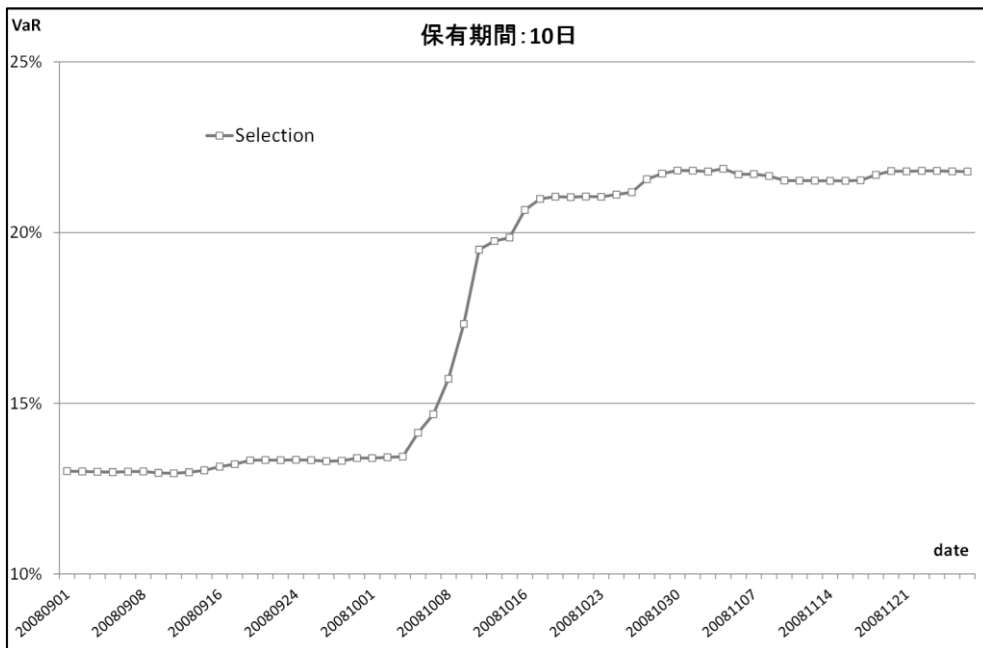
図 4-1 の下図 (Selection) では、“3STEP-procedure” により選定した確率分布を仮定して Value-at-Risk 推定を実施した結果を図に示している。イベント前の「低位安定期」では Logistic-VaR が選定されている。「変動期」については HSecant-VaR と Johnson-VaR が選定され、Johnson-VaR と同様に、階段状に徐々に上昇していく形状になっている。数値としては「低位安定期」には 4% 半ばであったものが、「高位安定期」については Laplace-VaR が選定されており、7% 半ばまで上昇している。

図 4-2 Value-at-Risk 推定 (保有期間：10 日)

- Johnson-VaR : ジョンソン SB 分布・ジョンソン SU 分布を仮定
- GL-VaR : 一般化ロジスティック分布を仮定
- Logistic-VaR : ロジスティック分布を仮定



“Selection”による Value-at-Risk 推定



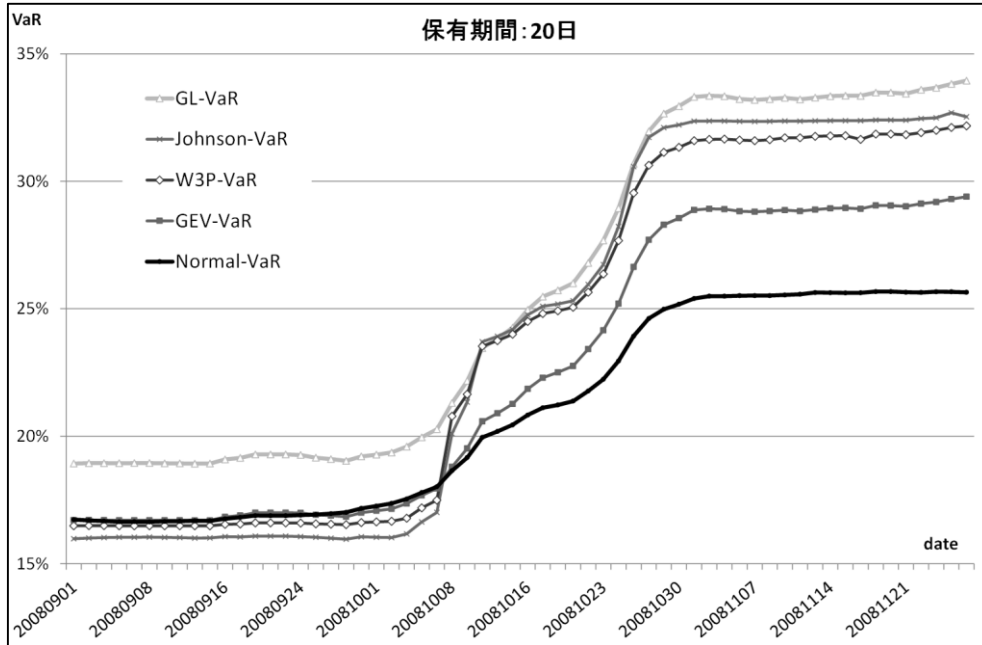
(出所) 筆者作成

図 4-2 の上図において Logistic-VaR を観察すると、レベルは Normal-VaR (12%前半) より少し大きい 13%程度で推移しており、保有期間 1 日と同様、リーマン・ショックという大きなイベント前後をうまく表現できている。また、Johnson-VaR はイベント前においては Normal-VaR と同レベル (12%程度) であったものが、2008 年 10 月 6 日から 2008 年 10 月 10 日までの 4 営業日で 19%半ばまで急騰するという大きな変化となっている。さらに GL-VaR では、2008 年 10 月 6 日から 2008 年 10 月 20 日までの 10 営業日で 14%から 20%まで上昇しており、Johnson-VaR ほど変化は大きくないが、「高位安定期」では Johnson-VaR と同レベルまで上昇している。

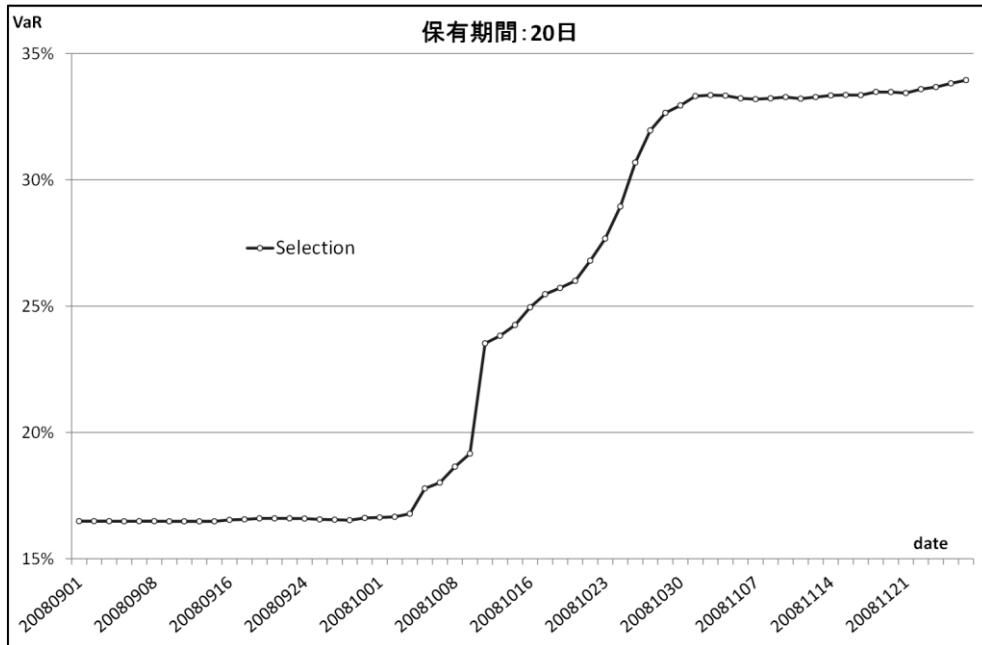
図 4-2 の下図 (Selection) においては、「低位安定期」については Logistic-VaR が選定されており、数値は 13%前後である。「変動期」は急激な変動を示す Johnson-VaR と GL-VaR が選定されており、大きな変化を含む形状になっている。数値的には 16%から 21%まで急激に上昇している。「高位安定期」でも GL-VaR と Johnson-VaR が選定されており 21%後半まで上昇し安定して推移している。

図 4-3 Value-at-Risk 推定 (保有期間：20 日)

- GL-VaR : 一般化ロジスティック分布を仮定
- Johnson-VaR : ジョンソン分布を仮定
- W3P-VaR : ワイブル分布 (3 パラメータ) を仮定
- GEV-VaR : 一般化極値分布を仮定
- Normal-VaR : 正規分布を仮定



“Selection”による Value-at-Risk 推定



(出所) 筆者作成

図 4-3 の上図において Normal-VaR を観察すると、「低位安定期」のレベルは 16%後半で推移し、「高位安定期」では 25%半ばでの推移となっている。この間の「変動期」では階段状になだらかな推移を示し、リーマン・ショックという大きなイベント後をうまく表現できていない。しかしながら、他の VaR でも観察される 2 段階で上昇という特徴は捉えている。ここで特徴的なのは Johnson-VaR と W3P-VaR がほとんど同じような推移を示していることである。「低位安定期」ではともに Normal-VaR よりも小さくなるため選定されることはないが、「変動期」では期間は短いものの急激な上昇として両方が順次選定されている。また、2 段階で上昇という特徴も、Johnson-VaR と W3P-VaR では顕著に表れている。一方、GL-VaR も「変動期」では 2 段階で上昇するという特徴を示しているが、上記の 2VaR ほどではなく境目が分かりにくい 2 段階となっている。「高位安定期」では 33%強で推移しており、2008 年 11 月 28 日では 34%弱まで高騰しており、最も高い数値となっている。

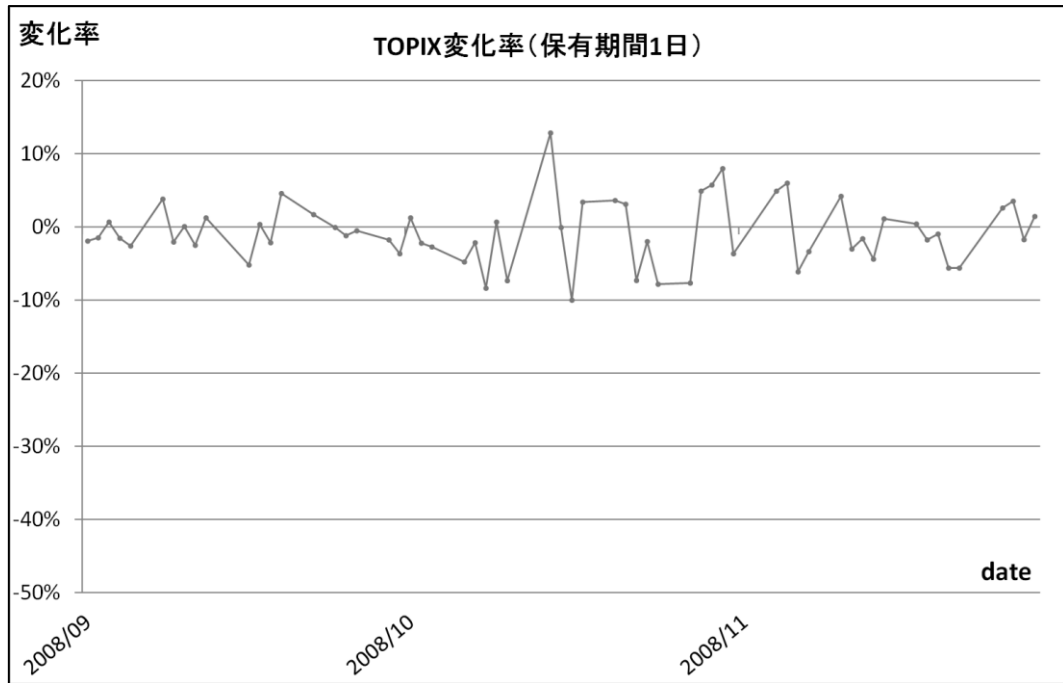
図 4-3 の下図 (Selection) においては、「低位安定期」については Johnson-VaR と W3P-VaR は Normal-VaR より小さくなっており、選定から外れている。しかしながら GEV-VaR は Normal-VaR とほぼ同レベル (16%後半) となっており、この時期は GEV-VaR が選定されている。「変動期」については急激な変化を示す Johnson-VaR と W3P-VaR が選定されており、大きな変化を含む 1 回目の急上昇になっている。2008 年 10 月 15 日以降、「変動期」(2 回目の急上昇) から「高位安定期」にかけては GL-VaR が選定されており、高いレベルになっている。数値では「低位安定期」には 16%半ばであったものが、「高位安定期」では 33%強まで上昇している。

“3STEP-procedure”により選定した確率分布を仮定して保有期間別に Value-at-Risk 推定結果を図により概観した。保有期間別にそれぞれ特徴的な推移となっており、保有期間 10 日では急激な上昇が顕著であり、保有期間 20 日では 2 段階で上昇するという特徴が見られた。それぞれの特徴は、今回計測したほとんどの確率分布でも同様な傾向が表れており、特定したリスクファクター及び保有期間の長さの特徴と言えよう。

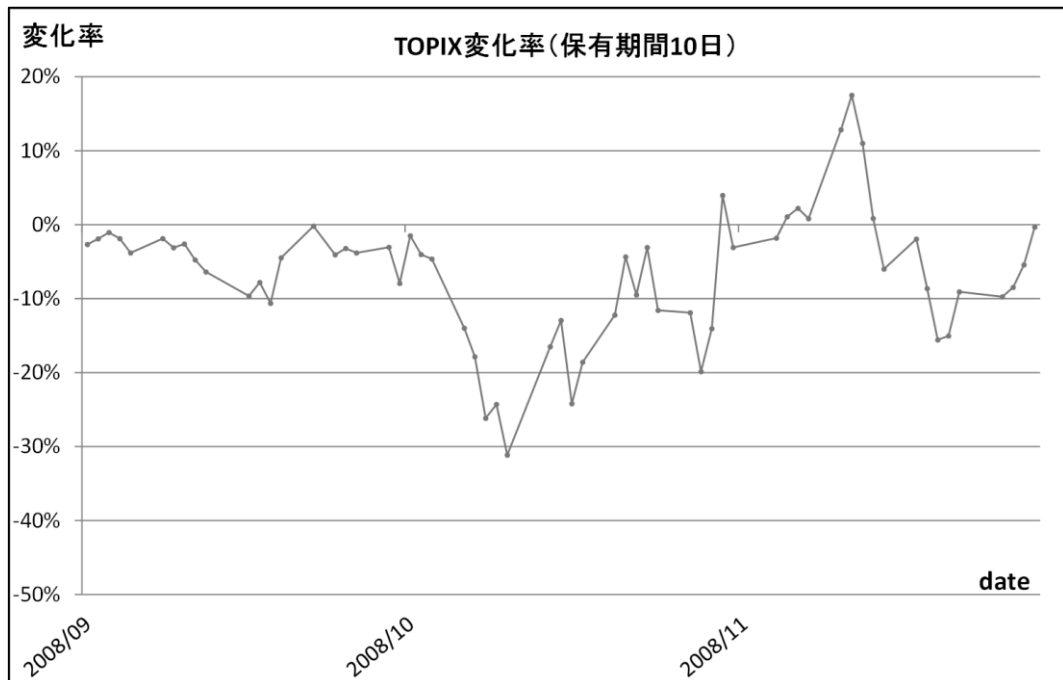
さらに、保有期間ごとの特徴的な推移を確認するため、変化率を図 4.4 に示す。

図 4-4 保有期間別の変化率

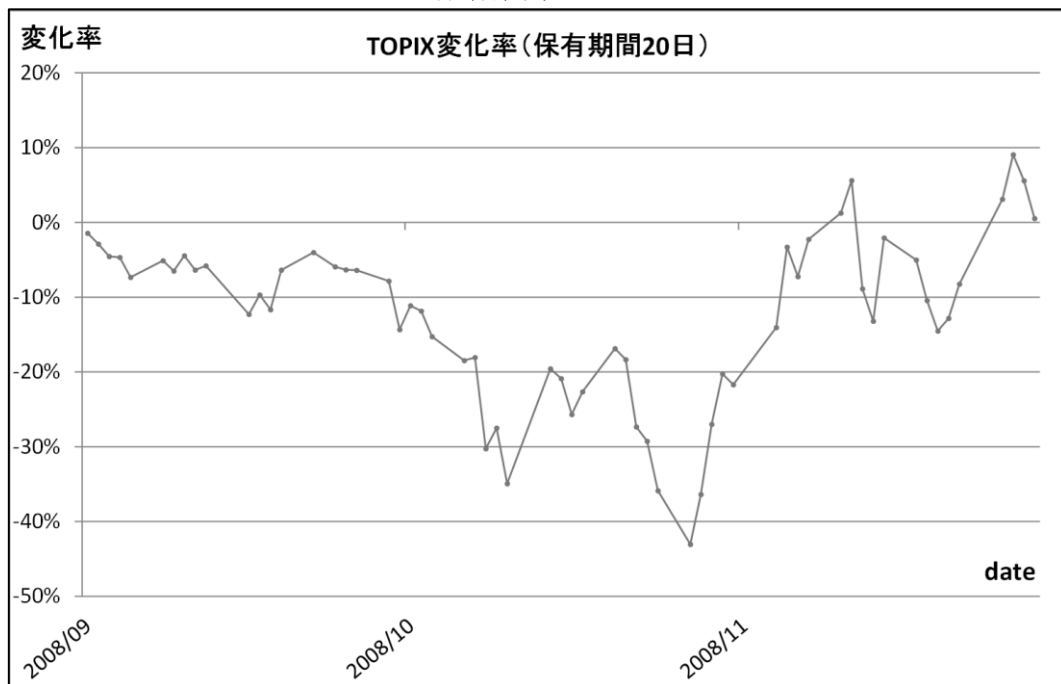
保有期間：1日



保有期間：10日



保有期間：20日



(出所) 東京証券取引所

※上の3図ともに縦軸・横軸を合わせている。特に縦軸では各保有期間の変化率のばらつきが異なることがわかる。保有期間1日より保有期間10日、保有期間10日より保有期間20日、と保有期間が長くなるほどばらつきが大きくなる。

保有期間 1 日では、ゼロを中心にプラスマイナスに均等に変動している様子が見て取れる。しかしながら、10 月 14 日には-10%程度の大きな変動が発生していることにより、Johnson-VaR において階段状の推移を示す原因となっていることがわかる。

保有期間 10 日では上記、保有期間 1 日の変化率とは異なり、10 月から大きなマイナス変動が発生しており、11 月初めには一時的に大きなプラスの変動も発生していることが見て取れる。結果として Value-at-Risk 推定では、変化率が連続してマイナス変動となることにより、最も大きな変動として表れていることがわかる。

保有期間 20 日では 10 月から 2 回に渡り、大きなマイナス変動が発生していることが見て取れ、これが 2 段階の上昇の原因と考えられる。また、イベント前である 9 月中からマイナス変動の状態となっており、保有期間 1 日の変化率とは大きく異なる形状となっている。

以上により、“3STEP-procedure”により選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定は、元となるリスクファクターの変化率データの特徴を適切に反映しており、有効なリスク計測手法であることが確認できる。

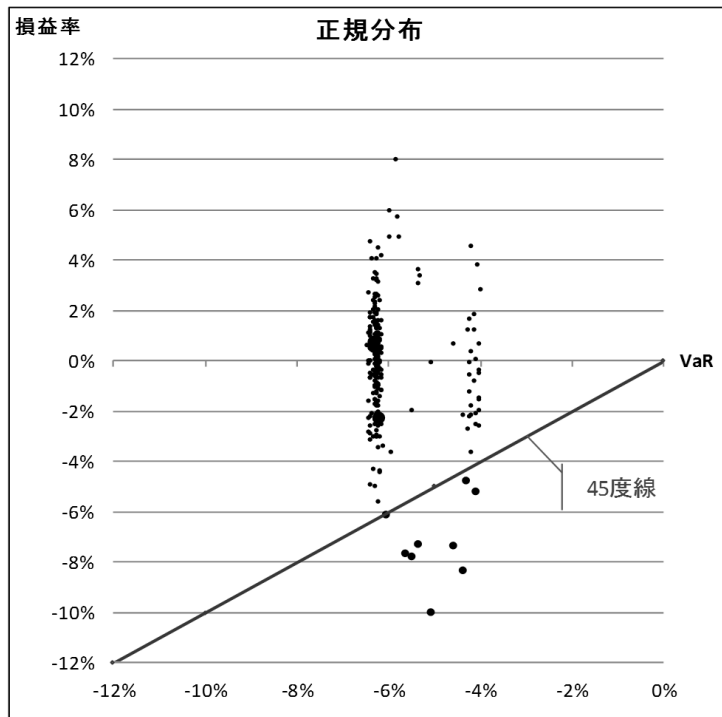
4.4.2 バックテストの結果

“3STEP-procedure”による確率分布の選択に対する妥当性検証としてバックテストを実施する。ただし、保有期間 1 日については 250 営業日分の観測データよりバックテストを実施するが、保有期間 10 日・20 日についてはバーゼル銀行監督委員会が規定した「トレーディング勘定のバックテストのフレームワーク」の前提（保有期間 1 日）から外れるため、観測データ 60 営業日分について、単純に「推定値と実績値の比較」という観点から超過回数の実数を比較検討することとし、参考として示す。

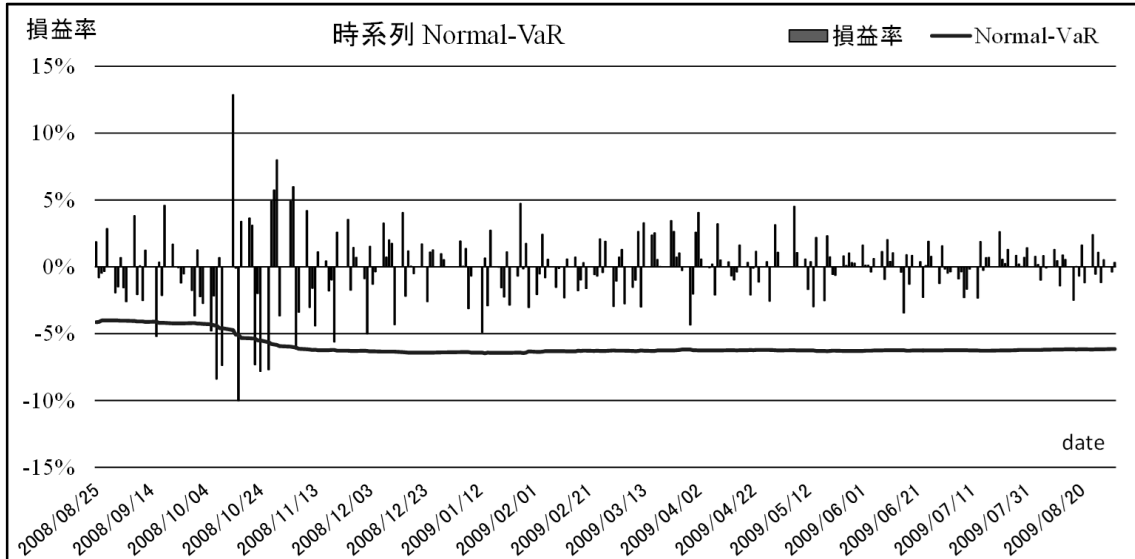
バーゼル銀行監督委員会が示すバックテストは「マーケット・リスクに対する所要自己資本額算出に用いる内部モデル・アプローチにおけるバックテスト」であり、ここでは正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定を基準として、その結果よりは良好であること、つまり、各非正規 VaR のバックテスト結果が Normal-VaR の超過回数よりも小さいことを確認することで、適用する非正規分布の適切性を判断する。

図 4-5 バックテストの結果（正規分布）

[保有期間 1 日：2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]

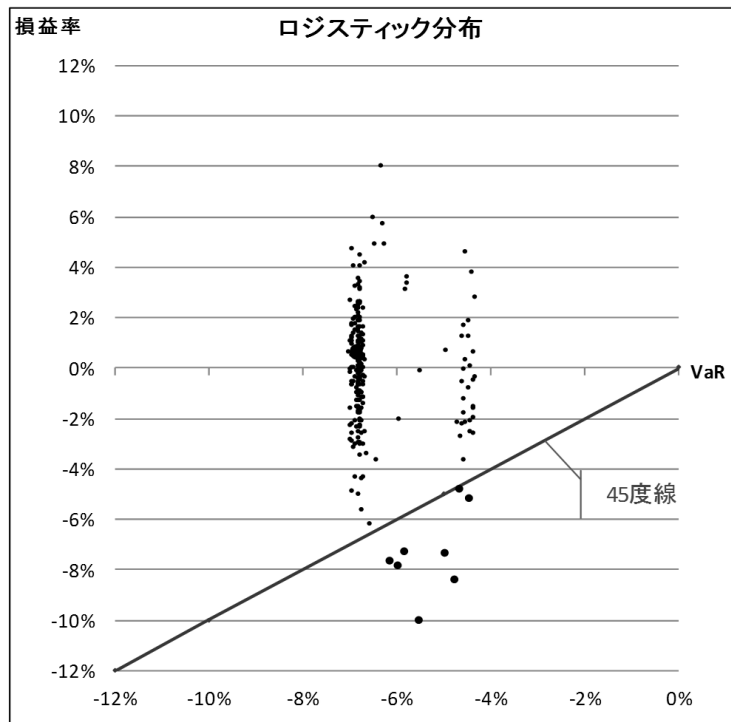


※超過回数は 250 回中、9 回である。

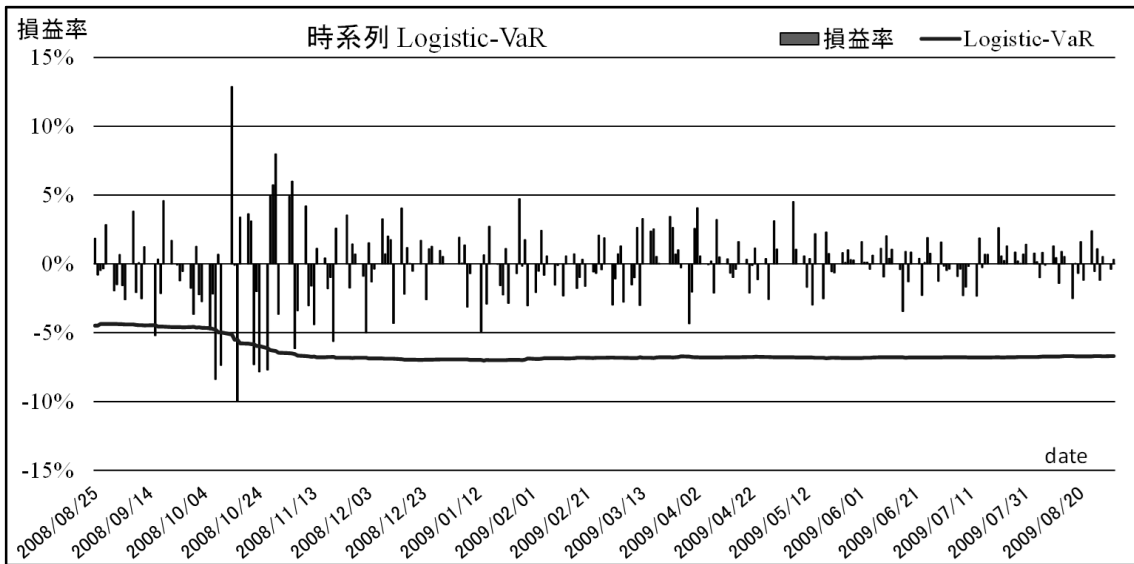


(出所) 筆者作成

図 4-6 バックテストの結果 (ロジスティック分布)
 [保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]

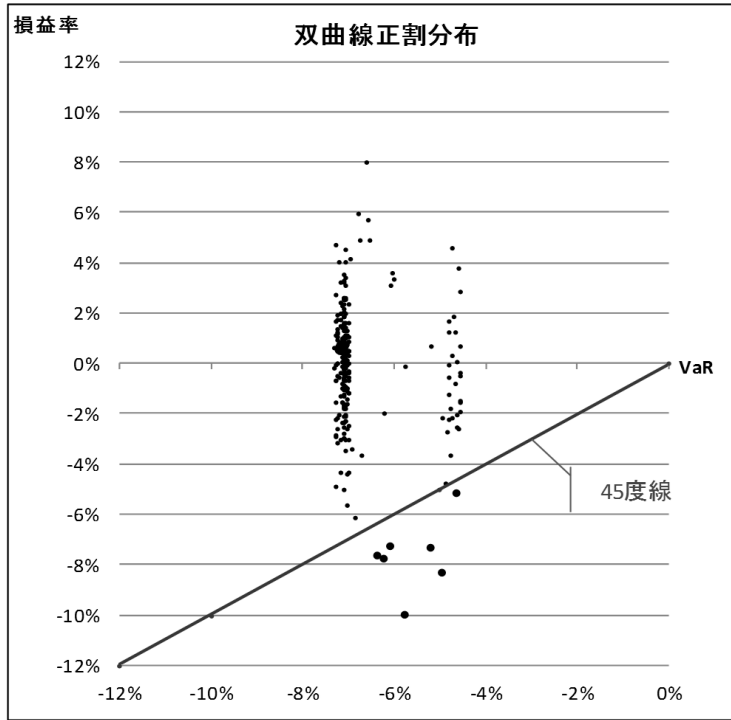


※超過回数は 250 回中, 8 回である.

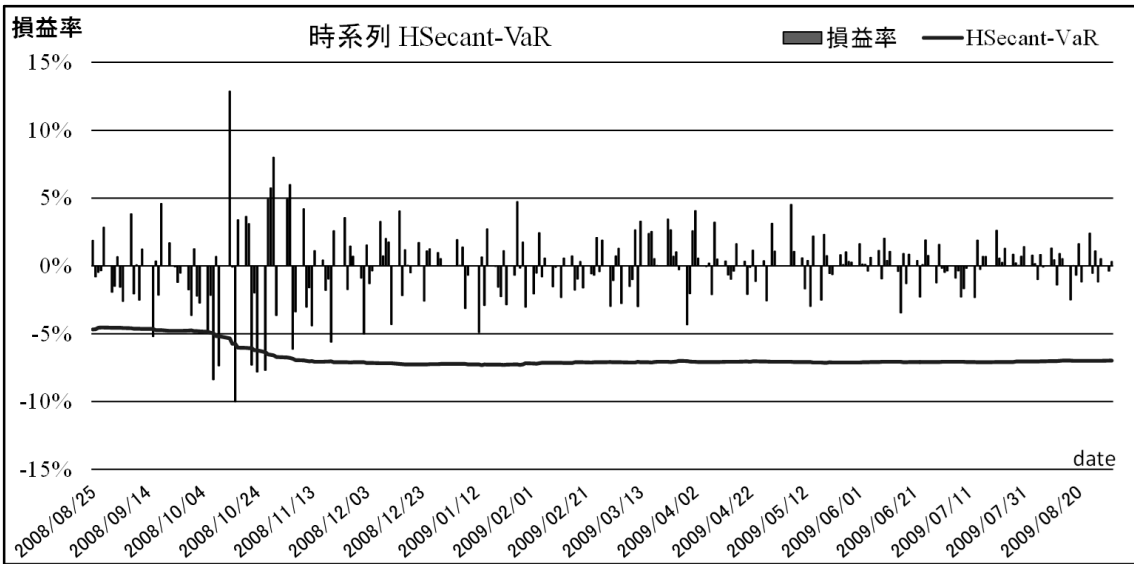


(出所) 筆者作成

図 4-7 バックテストの結果（双曲線正割分布）
 [保有期間 1 日：2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]



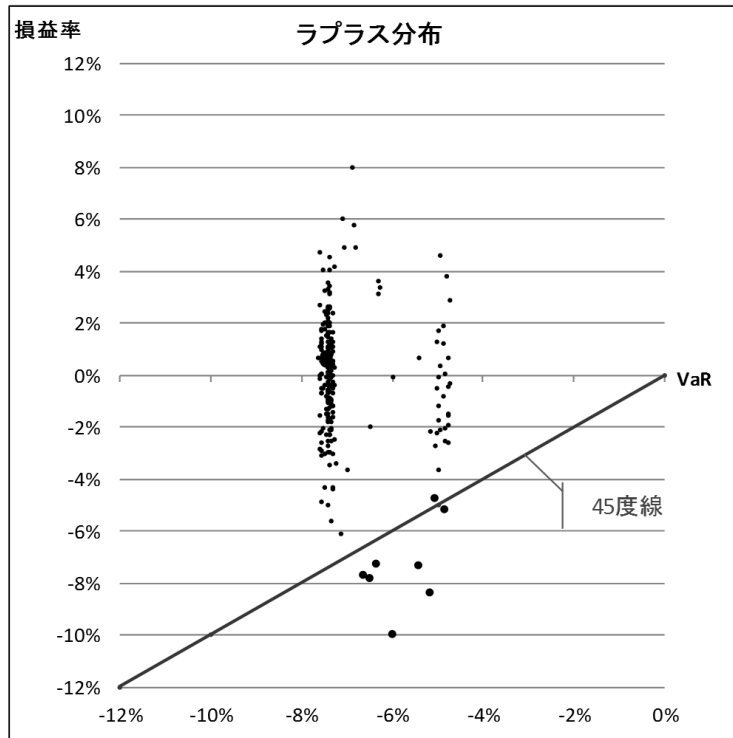
※超過回数は 250 回中，7 回である。



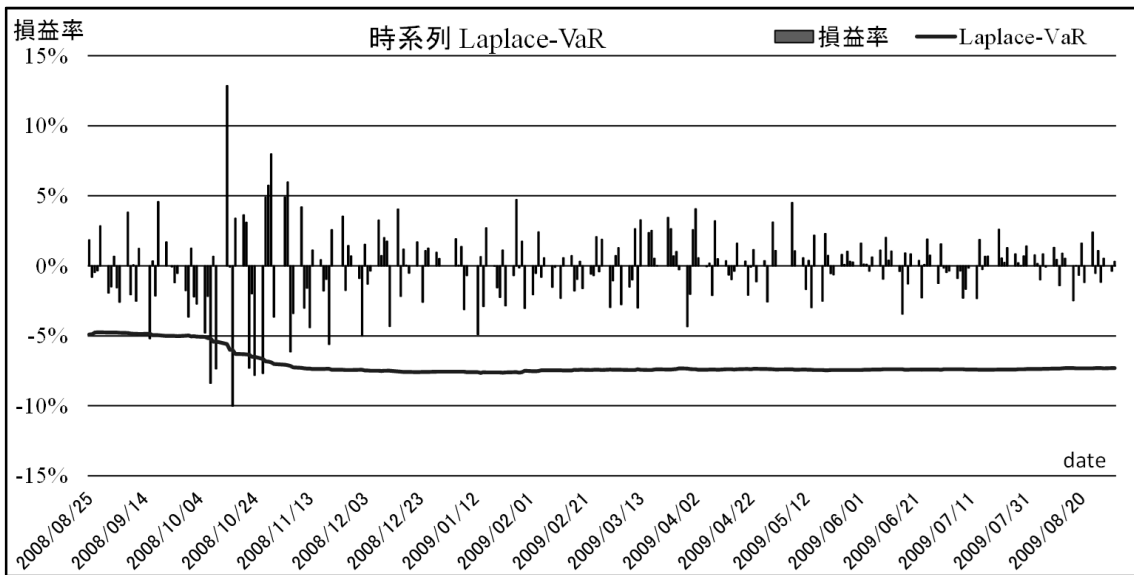
(出所) 筆者作成

図 4-8 バックテストの結果 (ラプラス分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]

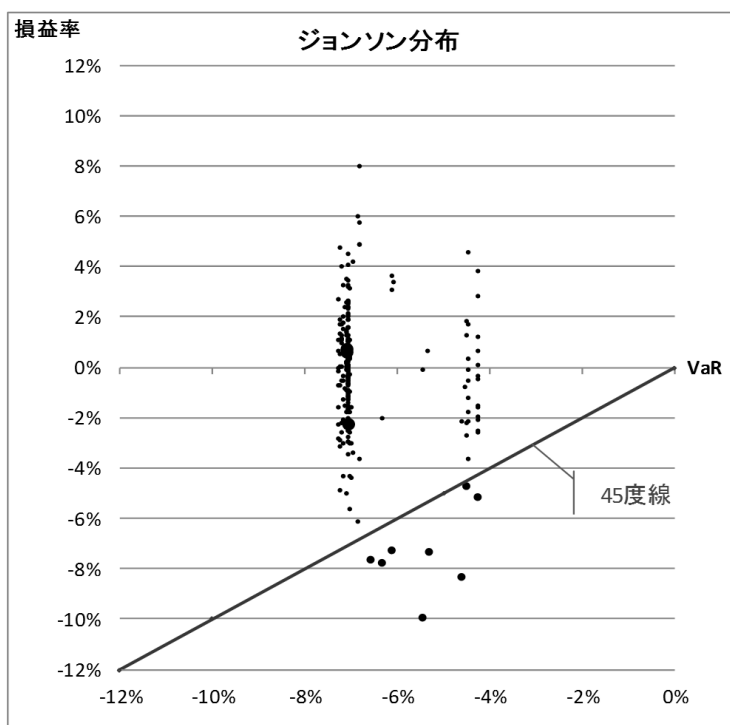


※超過回数は 250 回中、7 回である。

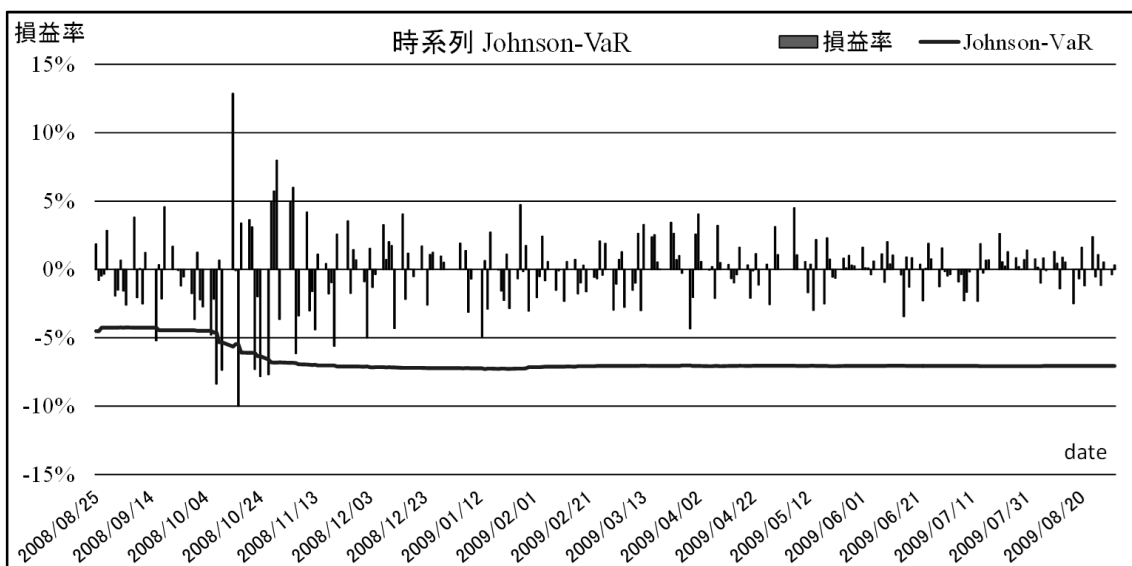


(出所) 筆者作成

図 4-9 バックテストの結果 (ジョンソン分布)
 [保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]



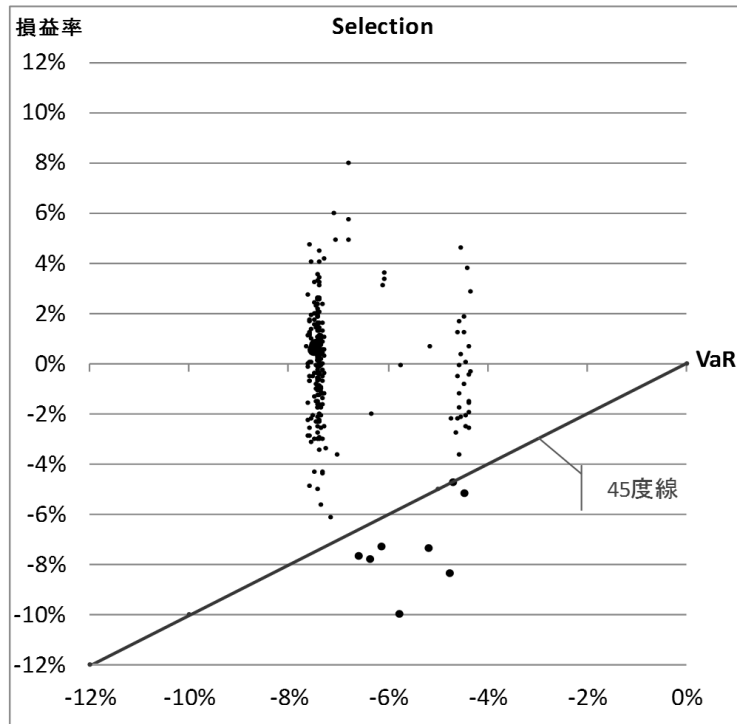
※超過回数は 250 回中, 8 回である.



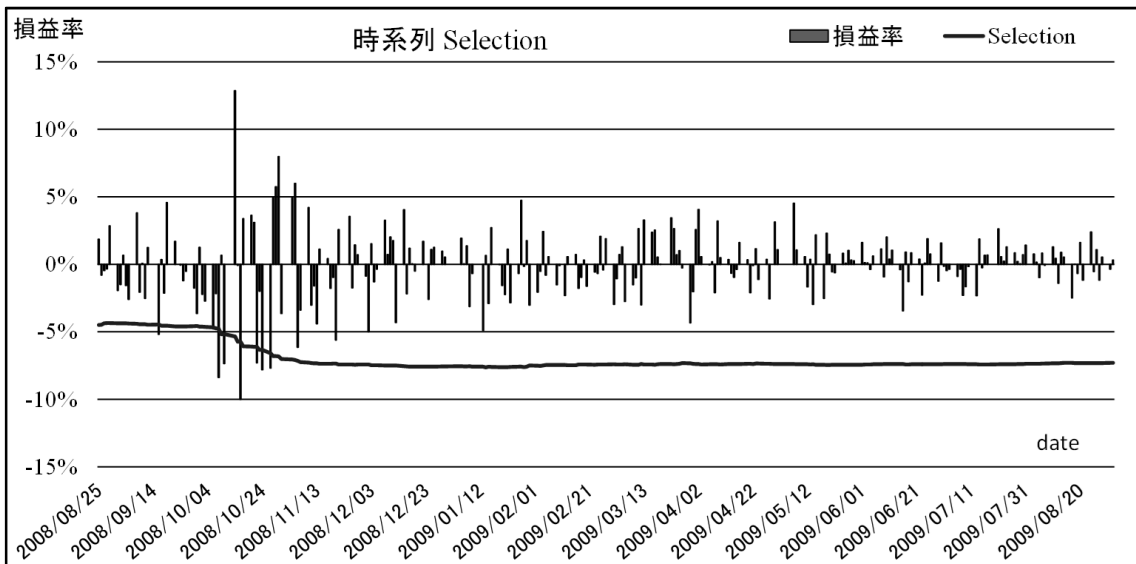
(出所) 筆者作成

図 4-10 バックテストの結果 (Selection)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]



※超過回数は 250 回中, 8 回である.



(出所) 筆者作成

表 4-7 バックテストの結果

[保有期間 1 日：2008 年 8 月 25 日~2009 年 9 月 1 日]

分布	超過回数
正規分布	9
ロジスティック分布	8
双曲線正割分布	7
ラプラス分布	7
ジョンソン分布	8
Selection	8
(参考)	
ヒストリカル法	4

(出所) 筆者作成

図 4-5~4.10 では各確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定によるバックテスト結果を示した。上図では横軸に Value-at-Risk 推定値，縦軸に現実の損益率を採り，現実の損益率が 45 度線より小さくなる場合「超過」とし，その超過回数を調べる。下図では横軸に日付を採り、時系列で示している。

表 4-7 ではバックテストの結果を一覧で示した。選定した確率分布による Value-at-Risk 推定値 (Selection) における保有期間 1 日のバックテストの結果は，超過回数 8 回となった。ロジスティック分布とジョンソン分布の超過回数と同じであること，及び正規分布の超過回数 9 回より少ないことから，“3STEP-procedure” による確率分布の選択は有効であると判断した。

表 4-8 バックテストの結果（参考 1）

[保有期間 10 日：2008 年 9 月 2 日~2008 年 12 月 1 日]

分布	超過回数
正規分布	10
ロジスティック分布	9
双曲線正割分布	9
ラプラス分布	8
ジョンソン分布	11
一般化ロジスティック分布	9
ワイブル分布(3P)	10
Selection	9
(参考)	
ヒストリカル法	8

(出所) 筆者作成

表 4-8 では保有期間 10 日のバックテスト結果を参考として示した。選定した確率分布による Value-at-Risk 推定値 (Selection) におけるバックテストの結果は、超過回数 9 回となり、正規分布の超過回数 10 回より少ないことから、“3STEP-procedure” による確率分布の選択は有効であると判断した。

表 4-9 バックテストの結果 (参考 2)

[保有期間 20 日 : 2008 年 9 月 2 日~2008 年 12 月 1 日]

分布	超過回数
正規分布	18
ロジスティック分布	18
双曲線正割分布	15
ラプラス分布	15
ジョンソン分布	19
一般化ロジスティック分布	15
ワイブル分布(3P)	19
一般化極値分布	18
Selection	18
(参考)	
ヒストリカル法	15

(出所) 筆者作成

表 4-9 では保有期間 20 日のバックテスト結果を参考として示した。選定した確率分布による Value-at-Risk 計測値 (Selection) におけるバックテストの結果は、超過回数 19 回となり、超過回数が最も少ないラプラス分布、双曲線正割分布及び一般化ロジスティック分布における 15 回より 4 回多くなった。超過回数が 19 回となった確率分布は正規分布、ジョンソン分布及びワイブル分布の 3 分布となり、正規分布と同じとなったことより “3STEP-procedure” の優位性を確認できなかった。

ただし、超過となった 2008 年 10 月 16 日から 10 月 30 日における実現損益の値はとても大きなマイナス変動であり、かつ、19 日間連続して発生している。これは保有期間を 20 日としたことが原因の 1 つと考えられる。つまり、このバックテストの結果により “3STEP-procedure” による分布選択の有効性を否定することはできないと考えられる。

4.5 考察

Value-at-Risk 推定には観測分布をそのまま適用させるヒストリカル法と呼ばれるわかりやすい手法がある。本章で採用した「経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法」は、ヒストリカル法の 1 つに分類される手法であり、損失率分布にパラメトリックな確率分布を仮定する静的分布モデルであり、無条件モデル³となる。現実の損益率の観測分布が日々変動するという事実に合わせて、日々変動する損益率の観測分布に、より適合する確率分布を選定し、かつ、ファットテイル判定というプロセスを加えている。

当初の契機は、Value-at-Risk 推定にパラメータが 4 つであるジョンソン SU 分布を適用させることであったが、ジョンソン SU 分布はあくまでも正規分布の進化系であり、歪度の影響を強く受けるという事象があること、また計測できない場合もあり、すべての状況に対応していないことがわかってきた。そこで非正規分布の範囲を拡大することで、Value-at-Risk 推定への適用可能性を探ることとした。

また、現実の損失率の観測分布は採用する保有期間やリスクファクターそのものにより形状が大きく変わることがわかっている。本章では、前者の保有期間に着目して保有期間を 10 日と 20 日に設定して保有期間 1 日のケースと比較分析することとした。確率分布の選択方法に関しては“3STEP-procedure”を提案し、分布の適合性とファットテイル性の 2 つの観点から、より良い確率分布を探ることとした。ここではファットテイル性の問題回避に重点を置いてはいるものの、リーマン・ショックのような大きなイベント発生後はファットテイル性の問題を回避することはほぼ不可能であることがわかった。その場合、ファットテイルの影響度を把握することで Value-at-Risk 推定を補完することとしている。計算結果としては保有期間 10 日と保有期間 20 日における Value-at-Risk 推定は各々の保有期間における変動の特徴を引き継いでいる結果となった。これは TOPIX 変化率の図からも同等の特徴を導き出すことができることを確認している。

本章ではパラメータが 4 つである「ジョンソン分布群」を除いて、パラメータが 3 つ以下の確率分布を採用するという条件を付けている。今回追加した確率分布である歪みに対応した「拡張分布群」となる一般化ロジスティック分布、一般化極値分布及びワイ

ブル分布（3パラメータ）の3分布については、いずれの分布も最終選択として選定されており、保有期間10日及び保有期間20日における歪んだ観測分布への対応として有効であると判断した。

また、バックテストにおいては、選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定値と現実の損益額を比較したところ、保有期間1日と10日では、超過回数が最も少ない確率分布と同じ超過回数であるという結論を得た。しかしながら、保有期間20日では正規分布の超過回数と同じという結果となった。すなわち、保有期間20日の場合、バックテスト結果により“3STEP-procedure”による分布選択の有効性を確認することはできなかつた。

“3STEP-procedure”では、ファットテイル性の問題回避に重点をおいて確率分布を選択しているものの、適合性の良い確率分布から選択しているため、十分な適合性が確保されている。このため、本研究で提案する方法は、分布の適合性の観点から有効であると言える。これについては、第4章 Appendix G：「累積分布関数と Probability Difference について」において、観測分布と選定された確率分布の比較分析を実施することで確認している。

最後に、本章では単一のリスクファクターを扱って評価・分析を行ってきたが、今後の課題として、ポートフォリオあるいは複数のリスクファクターによる評価・分析が必須である。そこで次章では、株式リスクと為替リスクを合併したポートフォリオのリスク評価に取り組む。

¹ 99%分位点は正確に表現すると、信頼水準 99%における分位点を指す.

² 第 3 章表 3-8 フェーズ区分別適用分布より.

フェーズ区分	適用する分布
低位安定期	正規分布
変動期	ロジスティック分布 双曲線正割分布 ラプラス分布
高位安定期	ジョンソン分布

³ 時間経過に対する環境の変化を扱うモデルを「条件付きモデル」といい、一方、時間経過に対する環境の変化を考慮しないモデルを「無条件モデル」という. McNeil, Frey, and Embrechts [2005] , 磯貝[2014] を参照.

Appendix F : 確率分布について

本研究では正規分布の他に、非正規分布として、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布、ジョンソン SU 分布、一般化ロジスティック分布、一般化極値分布、ワイブル分布 (3 パラメータ) , ジョンソン SB 分布を採用した。各分布の特性を示しておく。これらの確率分布の詳細については、真壁・久保田[2006], 蓑谷[2001], 蓑谷[2001], 蓑谷[2010], 四辻[2010]を参考にした。

Normal Distribution

<正規分布>

【特性】

- ・パラメータ : $-\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$
- ・範囲 : $-\infty < x < \infty$
- ・確率密度関数 : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$
- ・期待値 : μ
- ・分散 : σ^2
- ・歪度 : 0
- ・尖度 : 3
- ・平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 X を $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す。

Logistic Distribution

<ロジスティック分布>

【特性】

- ・パラメータ : $-\infty < \mu < \infty, \quad \theta > 0$
- ・範囲 : $-\infty < x < \infty$

- ・ 累積分布関数 : $\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)} = 1 - \frac{1}{1+\exp\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right] \right\}$
- ・ 確率密度関数 : $\frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)}{\theta \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right) \right\}^2} = \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)}{\theta \left\{ 1 + \exp\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right) \right\}^2} = \frac{1}{4\theta} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right]$
- ・ 期 待 値 : μ
- ・ 分 散 : $\frac{\pi^2 \theta^2}{3}$
- ・ 歪 度 : 0
- ・ 尖 度 : $\frac{21}{5}$ (=4.2)

【分位点】

- ・ 累積分布関数の逆関数 : $F^{-1}(u) = \mu + \theta \ln \left(\frac{u}{1-u} \right)$

Hyperbolic Secant Distribution

< 双曲線正割分布 >

【特性】

- ・ パラメータ : $-\infty < \mu < \infty, \quad \theta > 0$
- ・ 範 囲 : $-\infty < x < \infty$
- ・ 累積分布関数 : $\frac{2}{\pi} \arctan \left[\exp \left\{ \frac{\pi(x-\mu)}{2\theta} \right\} \right]$
- ・ 確率密度関数 : $\frac{1}{2\theta} \operatorname{sech} \left\{ \frac{\pi(x-\mu)}{2\theta} \right\} = \frac{1}{\theta \left[\exp \left\{ \frac{\pi(x-\mu)}{2\theta} \right\} + \exp \left\{ -\frac{\pi(x-\mu)}{2\theta} \right\} \right]}$
- ・ 期 待 値 : μ
- ・ 分 散 : θ^2
- ・ 歪 度 : 0
- ・ 尖 度 : 5

【分位点】

- ・累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \mu + \frac{2\theta}{\pi} \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} u \right) \right)$

Laplace Distribution

<ラプラス分布>

Double-exponential Distribution

<二重指数分布>

【特性】

- ・パラメータ： $-\infty < \mu < \infty, \theta > 0$
- ・範囲： $-\infty < x < \infty$
- ・累積分布関数：

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\mu-x}{\theta} \right), & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right), & x \geq \mu \end{cases}$$

- ・確率密度関数： $\frac{1}{2\theta} \exp \left[-\frac{|x-\mu|}{\theta} \right]$
- ・期待値： μ
- ・分散： $2\theta^2$
- ・歪度： 0
- ・尖度： 6

【分位点】

- ・累積分布関数の逆関数：

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \mu + \theta \ln 2u & \left(0 < u < \frac{1}{2} \right) \\ \mu - \theta \ln 2(1-u) & \left(\frac{1}{2} \leq u < 1 \right) \end{cases}$$

Johnson SU Distribution

<ジョンソン SU 分布>

【特性】

- ・パラメータ： $\delta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$, $\lambda > 0$
- ・基本情報：平均 μ , 標準偏差 σ , 歪度, 尖度
- ・範囲： $-\infty < x < \infty$ ：非有界

・累積分布関数：
$$\Phi \left\{ \gamma + \delta \ln \left[\frac{x-\xi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right)^2 + 1} \right] \right\}$$

$$= \Phi(\gamma + \delta \sinh^{-1} z), \quad z = \frac{x-\xi}{\lambda}$$

・確率密度関数：
$$\frac{\delta}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma + \delta \ln \left[\frac{x-\xi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right)^2 + 1} \right])^2 \right\}$$

$$= \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi} \sqrt{z^2 + 1}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\gamma + \delta \sinh^{-1} z)^2 \right], \quad z = \frac{x-\xi}{\lambda}$$

・期待値： $\xi - \lambda \omega^{\frac{1}{2}} \sinh \Omega$, $\omega = \exp(\delta^{-2})$, $\Omega = \frac{\gamma}{\delta}$

・分散： $\frac{\lambda^2}{2} (\omega - 1)(\omega \cosh 2\Omega + 1)$

・歪度： $-\frac{\left[\frac{1}{2} \omega(\omega-1) \right]^{\frac{1}{2}} [\omega(\omega+2) \sinh 3\Omega + 3 \sinh \Omega]}{(\omega \cosh 2\Omega + 1)^{\frac{3}{2}}}$

・尖度： $\frac{\omega^2(\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3) \cosh 4\Omega + 4\omega^2(\omega+2) \cosh 2\Omega + 3(2\omega+1)}{2(\omega \cosh 2\Omega + 1)^2}$

【パラメータ推定】

- ・Tuenter [2001] の方法による.

【分位点】

・累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \lambda \sinh \left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \gamma}{\delta} \right) - \xi$

Generalized Logistic Distribution

<一般化ロジスティック分布>

【特性】

・パラメータ:

位置母数: μ

尺度母数: σ ($\sigma > 0$)

形状母数: k

・ 範囲: $1 + k \frac{(x-\mu)}{\sigma} > 0$ $k \neq 0$

$-\infty < x < \infty$ $k = 0$

・ 累積分布関数: $\frac{1}{1+(1+kz)^{-1/k}}$ $k \neq 0$ $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\frac{1}{1+\exp(-z)}$ $k = 0$

・ 確率密度関数: $\frac{(1+kz)^{-1-1/k}}{\sigma(1+(1+kz)^{-1/k})^2}$ $k \neq 0$ $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\frac{\exp(-z)}{\sigma(1+\exp(-z))^2}$ $k = 0$

【分位点】

・ 累積分布関数の逆関数: $F^{-1}(u) = \mu + \frac{\sigma}{k} \left\{ \left(\frac{u}{1-u} \right)^k - 1 \right\}$

Generalized Extreme Value Distribution

<一般化極値分布>

【特性】

・パラメータ:

位置母数: μ

尺度母数 : σ ($\sigma > 0$)

形状母数 : k

・ 範 囲 : $1 + k \frac{(x-\mu)}{\sigma} > 0$ $k \neq 0$

$-\infty < x < \infty$ $k = 0$

・ 累積分布関数 : $\exp(-(1+kz)^{-1/k})$ $k \neq 0$ $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\exp(-\exp(-z))$ $k = 0$

・ 確率密度関数 : $\frac{1}{\sigma} \exp(-(1+kz)^{-1/k})(1+kz)^{-1-1/k}$ $k \neq 0$ $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$
 $\frac{1}{\sigma} \exp(-z - \exp(-z))$ $k = 0$

【分位点】

・ 累積分布関数の逆関数 : $F^{-1}(u) = \mu + \frac{\sigma}{k} ((-\ln u)^{-k} - 1)$

Weibull Distribution

<ワイブル分布>

【特性】

・ パラメータ : 3パラメータ

位置母数 : γ

尺度母数 : β ($\beta > 0$)

形状母数 : α ($\alpha > 0$)

・ 範 囲 : $\gamma \leq x < +\infty$

・ 累積分布関数 : $1 - \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right)$

・ 確率密度関数 : $\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right)$

【分位点】

・ 累積分布関数の逆関数 : $F^{-1}(u) = \gamma + \beta\{-\ln(1-u)\}^{1/\alpha}$

Johnson SB Distribution

<ジョンソン SB 分布>

【特性】

・パラメータ： $\delta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$, $\lambda > 0$

・範囲： $\xi \leq x \leq \xi + \lambda$

・累積分布関数： $\Phi\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)$, $z \equiv \frac{x-\xi}{\lambda}$

・確率密度関数： $\frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi}z(1-z)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^2\right)$

・モーメント：

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ b + a \exp\left(-\frac{z-\gamma}{\delta}\right) \right\}^k \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{z-\gamma}{\delta}\right) \right\}^{-k} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

【分位点】

・累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \frac{\lambda \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(u)-\gamma}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(u)-\gamma}{\delta}\right)} + \xi$

Appendix G : 累積分布関数と Probability Difference について

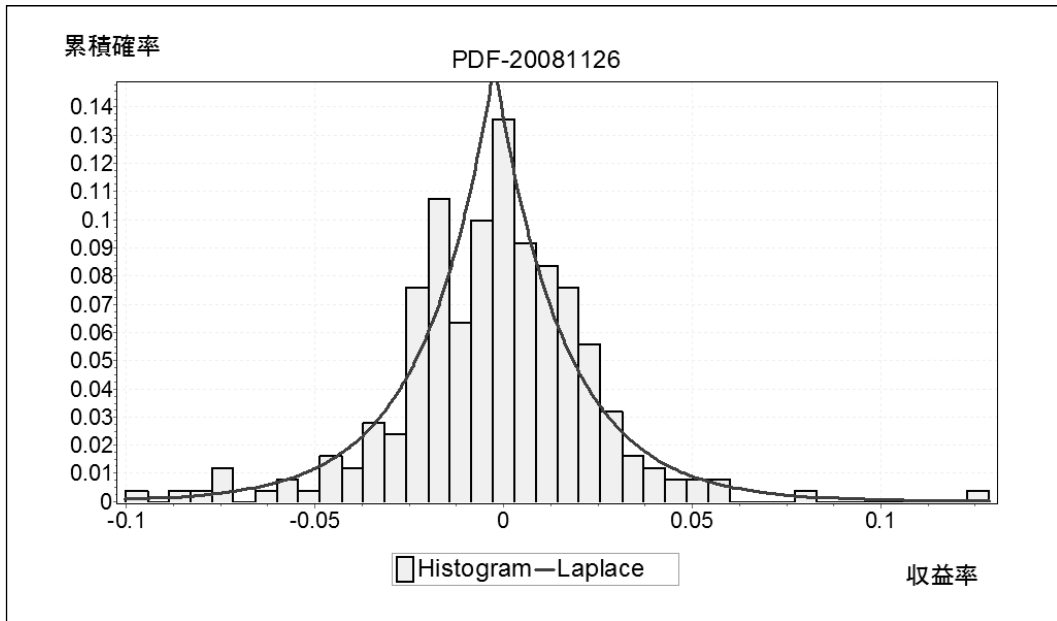
4.3.2 保有期間 1 日の分布選択では、結果として表 4-1 3STEP-Procedure (保有期間: 1 日) を示した。ここでは累積分布関数と Probability Difference¹の 2 つの図を示し、収益率分布の左裾の状況を確認する。

Probability Difference は $F_n(x) - \tilde{F}(x)$ で定義され²、経験分布の累積分布関数と理論累積分布関数の差を示している。上式はコルモゴロフ-スミルノフ検定とアンダーソン-ダーリング検定における基礎となる式となっている。図上では縦軸における累積分布の乖離を把握でき、かつ、横軸で分布の散らばりを捉えることができる。確率密度関数・累積分布関数・Q-Q プロットの図と比較すると横軸の目盛が同じであり、4 つの図を確認することで視覚的に左裾の状況を確認することができる。

以下に、2008 年 11 月 26 日 TOPIX 日次変化率の 5 つの図を示す。それぞれ図 G-1 確率密度関数図、図 G-2 累積分布関数図と拡大図、図 G-3 Q-Q プロット、図 G-4 Probability Difference となる。ここでは観測分布 (ヒストグラム) と選定されたラプラス分布を比較している。

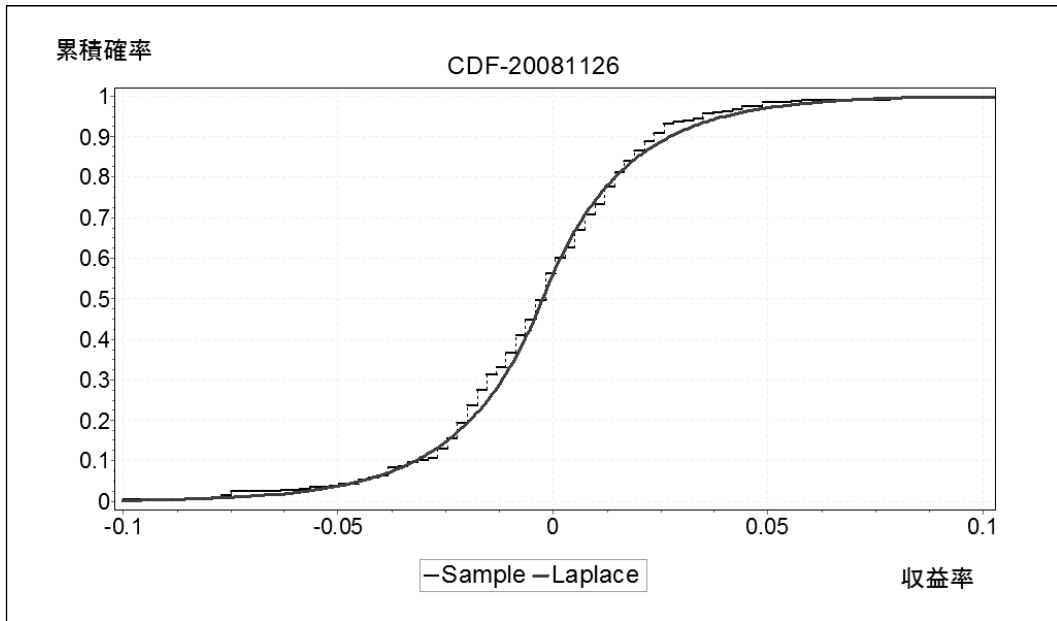
以下の 5 つの図より視覚的にわかる事象を示す。図 G-1 確率密度関数では、ファットテイルなラプラス分布をもってしても、観測分布 (棒グラフ) を捉えていないことがわかる。図 G-2 累積分布関数ではラプラス分布の分位点は現実の観測分位点を捉えていない。図 G-3 Q-Q プロットでは小さい方から 2 番目の点³は 45 度線から大きく外れていないことがわかる。最後に図 G-4 Probability Difference では、小さい方から 2 番目の点 は乖離が小さいことがわかる。ここで Probability Difference の図では、値がプラスになるときは観測分布を捉えていないこととなる。すなわち、ラプラス分布を仮定した場合の分位点が観測分布による分位点を捉えていない、ファットテイルの状態になっているが、その乖離は小さいためファットテイルの影響は小さいと考えられる。

図 G-1 確率密度関数

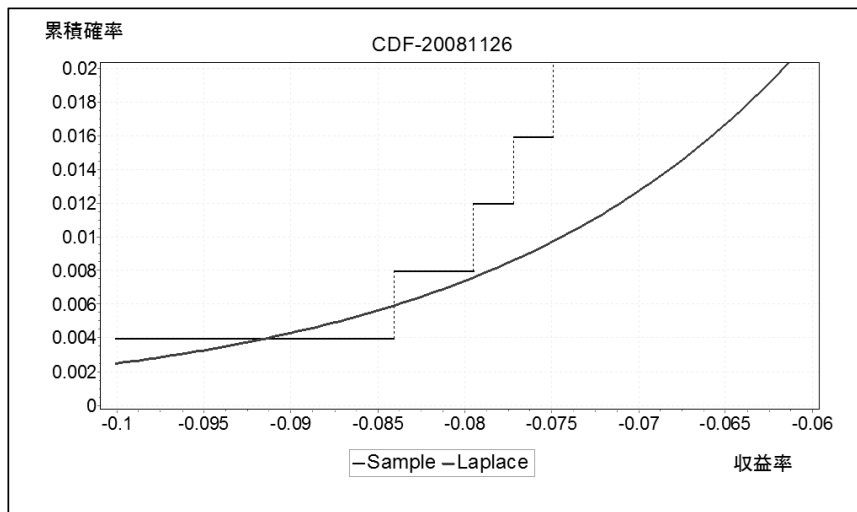


(出所) 筆者作成

図 G-2 累積分布関数



拡大図



(出所) 筆者作成

図 G-3 Q-Q プロット

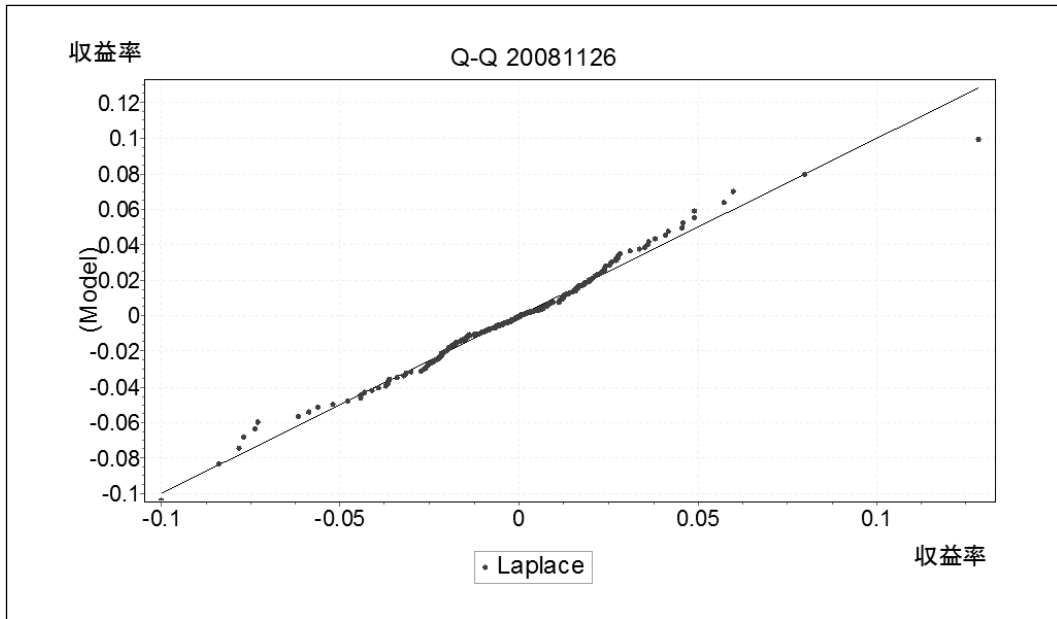
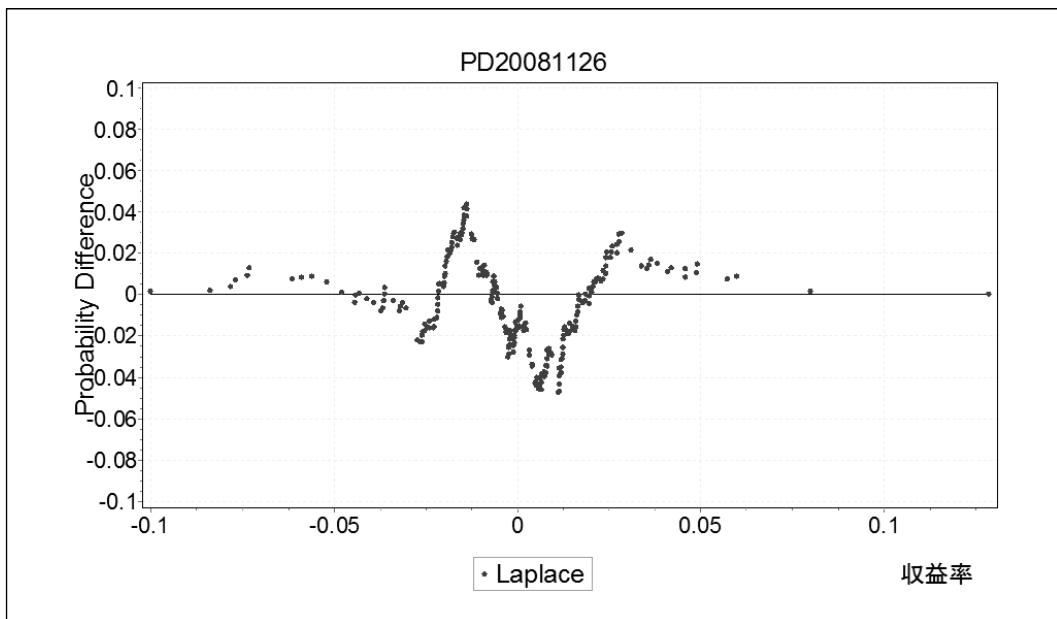


図 G-4 Probability Difference



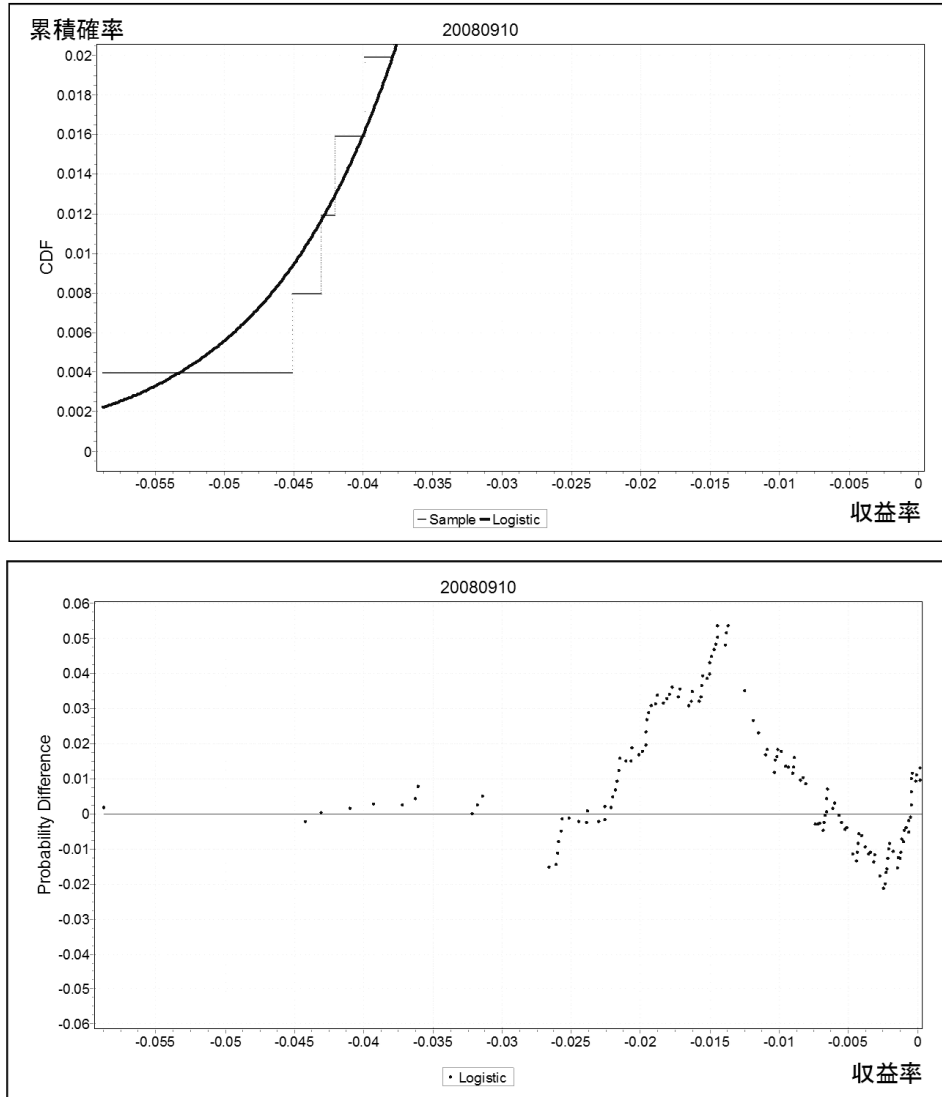
(出所) 筆者作成

累積分布関数と Probability Difference の図を対比させて図 G-5 2008 年 9 月 10 日, 図 G-6 2008 年 10 月 14 日, 図 G-7 2008 年 11 月 26 日に示す. 累積分布関数の図については全体を表示すると左裾部分が見えにくいため, 左裾部分を拡大している. 収益率が最大 0, つまり横軸は 0 以下となるように累積分布関数と Probability Difference の 2 つの図の横軸を揃えて設定する.

図 G-5 ではロジスティック分布, 図 G-6 では双曲線正割分布, 図 G-7 ではラプラス分布, というように最終選定された確率分布と対比して示している.

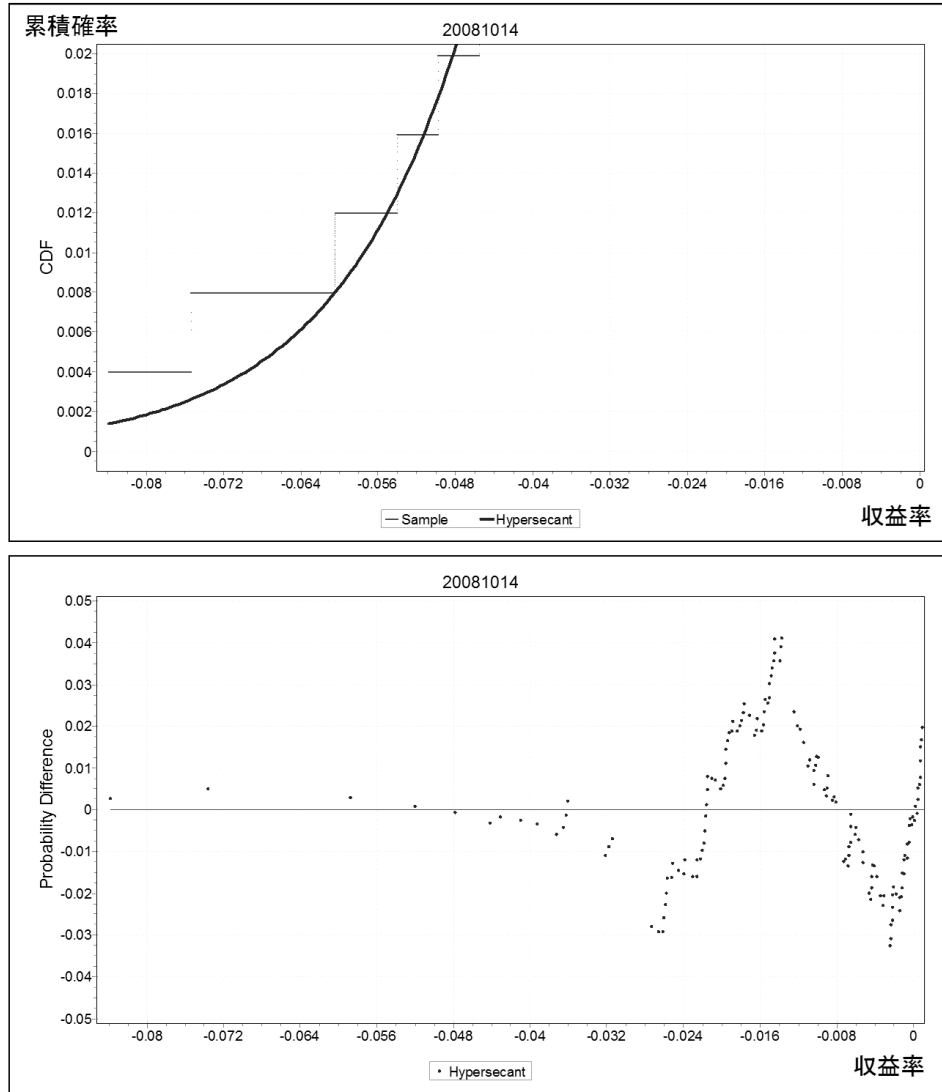
3STEP-procedure は第 3 章本文で示しているように分布適合性とファットテイル性を考慮して選定を実施しているので, 収益率分布の左裾における適合は非常に良いことがわかる. 図 G-6~7 のとおり, イベント発生後である 2008 年 10 月 14 日と 2008 年 11 月 26 日においては, 小さい方から 2 番目の点はファットテイルの状態になっているが, 乖離幅がさほど大きくないことが確認できる. すなわち, ファットテイルの影響は小さいと考えられる.

図 G-5 2008 年 9 月 10 日 (ロジスティック分布)



(出所) 筆者作成

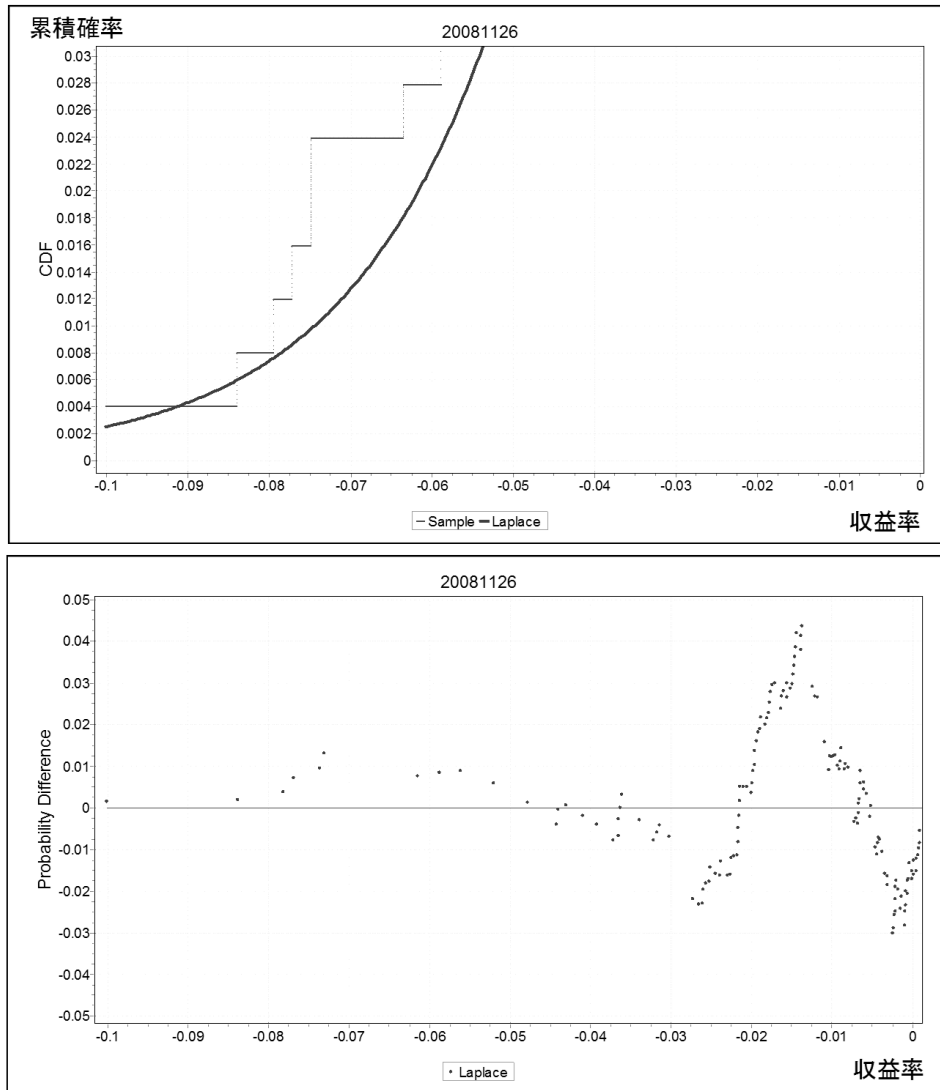
図 G-6 2008 年 10 月 14 日 (双曲線正割分布)



(出所) 筆者作成

※図中、Hypersecant と表記されているのは双曲線正割分布 (HSecant) を指す。

図 G-7 2008 年 11 月 26 日 (ラプラス分布)



(出所) 筆者作成

¹ MathWave Technologies 社が提供している “EasyFit” の中で採用されているグラフを使用している.

² $F_n(x) - \tilde{F}(x)$ の定義

$F_n(x)$: 観測データの分布の累積分布関数

$\tilde{F}(x)$: 仮説の分布の累積分布関数

³ 観測期間 251 日の分位点は小さい方から 2 つ目となる.

第5章 ポートフォリオのリスク評価

5.1 はじめに

本章の目的は、現実の観測分布に適合した静的分布モデルである、ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を用い、単一のリスクファクターからポートフォリオ（株式と為替）に拡大して、評価及び分析することにある。本章で扱うリスクファクターは価格変動リスクとし、株式指数（TOPIX）と為替レート（円／ドル）とする。この2つのエクスポージャー¹を合算して1つのポートフォリオとし、そのリスク量を計測する。併せて実務で使われることが多い、保有期間 1 日及び 5 日（1 週間）を採用する。本章では現実の観測分布に適合する確率分布を特定し、かつ、ファットテイル性の問題を考慮した上で仮定する確率分布を決定するプロセスを提案する。このプロセスを“4STEP-procedure”と呼ぶ。

日々の損失率の観測分布は設定する観測期間・保有期間やリスクファクターにより形状が大きく異なるため、基本分布群²やジョンソン分布群が当てはまらない可能性がある。その対応策としてワイブル分布（3 パラメータ）と一般化ロジスティック分布の 2 分布を追加し、拡張分布群³とした。いずれもパラメータが 3 つの確率分布であり、歪んだ分布に対応することが期待できる。

保有期間 1 日及び 5 日の Value-at-Risk 推定において保有期間が持つ特徴を引き継ぎ、大きなイベントを含む期間のリスク量推移がうまく表現できていることを確認する。また、バックテストを行い、超過回数の実数比較において Normal-VaR より超過回数が少なくなることを確認することで、“4STEP-procedure”による分布選定が妥当であることを示す。

本章の構成は以下のとおりである。5.2 節では、本章における Value-at-Risk 推定のパラメータと前提を設定する。5.3 節では、分布の選択の方法として“4STEP-procedure”を提案し、その手順に従い仮定する分布を選定する。5.4 節では、株式 VaR と為替 VaR の相関の影響を分析し、実現損益と Value-at-Risk 推定値とのバックテストを実施してその適合度を確認する。5.5 節では、前節までの評価・分析をもとに結論をまとめる。

5.2 Value-at-Risk 推定の前提

Value-at-Risk 推定では、前提として保有期間と信頼水準を設定する必要がある。保有期間は保有する資産のリスク量を推定する期間を示しており、本章では保有期間を 1 日と 5 日とし、保有期間 5 日ではデータのサンプル方法として重複を許す Moving-Window 法に依っている。また、信頼水準は一般的に使用されることが多い 99% とする。

次にリスクファクターの前提を決定しておく。本章ではリスクファクターを株式指数と為替レートとし、株式指数については TOPIX を使用し、為替レートについては円／ドル TTM⁴を使用する。観測期間として取得した収益率データ及び損失率データは、2007 年 8 月 1 日より 2008 年 12 月 30 日までとし、株式指数については Yahoo ファイナンスより取得した TOPIX を使用して算出する。為替レートについては三菱 UFJ リサーチ&コンサルティング株式会社が公表している為替レート（円／ドル TTM）を使用して算出する。

なお、本章では分析をわかりやすくするために株式リスクと為替リスクのみを合算した価格変動リスクを対象としており、合算したポートフォリオにおけるエクスポージャーの比率については、7 : 3 の割合⁵を採用している。また、推定した Value-at-Risk 推定結果はパーセント表記しており、Value-at-Risk 推定結果を金額表示するには、エクスポージャーの金額に Value-at-Risk 推定結果（変化率）を掛けることで計算すればよい⁶。その他の前提として、リスクファクターの変化率は対数収

益率及び対数損失率とする。分布の選択において分析する適合度の検定やファットテイル判定では対数収益率で表記し、Value-at-Risk 推定では対数損失率で表記している。また、観測期間は 251 日（1 年相当）とし、評価期間は 2008 年 9 月 1 日より 2008 年 11 月 30 日までの 3 か月とする。パラメータ推計については、推定する分布に応じてモーメント法または最尤法を採用しており、特にジョンソン SU 分布のパラメータ推計については Tuenter [2001] のモーメント法に依っている。

5.3 分布の選択

現実の観測分布に当てはめる確率分布の選択方法については、任意の基準に従って事前に選定しておいた確率分布より、合理的に判定し選択する方法を採る。本章では基準として“4STEP-procedure”⁷を提案する。また、事前に選定した確率分布として、以下の 8 確率分布とする。正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布の 4 分布を「基本分布群」と呼び、ジョンソン SU 分布とジョンソン SB 分布の 2 分布を「ジョンソン分布群」と呼ぶ。この「基本分布群」と「ジョンソン分布群」を分析における基礎的な分布とする。また、損失率の観測分布の歪みに対応した一般化ロジスティック分布及びワイブル分布（3 パラメータ）の 2 分布を追加し、これを「拡張分布群」⁸と呼ぶ。

分析対象とする観測日は、大きな変動が発生する以前の「低位安定期」として、2008 年 9 月 10 日・11 日・12 日の 3 日間を抽出する。次に大きな変動の発生日を含む「変動期」として、2008 年 10 月 14 日・15 日・16 日の 3 日間を抽出する。最後に大きな変動の発生後、1 か月程度経過して安定を取り戻した「高位安定期」として、2008 年 11 月 19 日・20 日・21 日の 3 日間を抽出する。

5.3.1 4STEP-procedure

まず、STEP1 では適合性の検定（アンダーソン-ダーリング検定）を用いて統計検定量を基準として確率分布を抽出する。すなわち、観測分布と対比させて、分布の

当てはまりが良い確率分布を統計的方法により抽出する。次に、STEP2ではファットテイル判定により観測値の分位点からの乖離幅が小さくなる確率分布を抽出する。分布の左裾に注目して、観測分布の99%分位点を捉えられる確率分布を抽出している。次に、STEP3では上記の2つのSTEP、分布の適合性とファットテイル判定のいずれを優先するかを事前に決めておき、それに従い適合度の高い確率分布を選定する。本章では、STEP2ファットテイル判定を優先し、ファットテイル性の問題がより少なくなるような確率分布を抽出する。最後に、STEP4では実際にValue-at-Risk推定を実施して、その結果よりValue-at-Risk推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮する。連続性を考慮する際には「基本分布群」である4分布の推移を基準とする。

STEP1：適合度判定

代表的な適合性の検定の1つである、アンダーソン-ダーリング検定⁹を用い、事前に選択した8分布の中から適合度の高い確率分布を抽出する。具体的には $\alpha=0.2$ の時の規準値1.3749を超過しない確率分布を複数選択し、適合度の高い確率分布から順番に表記する。ここでは結果として3~6個程度の確率分布を抽出する。

※表5-1・表5-2の分布名の下段にAD統計量を表示している。

STEP2：ファットテイル判定

ファットテイル判定は、現実の損失率の観測分布の99%分位点と事前に準備した8分布の99%分位点の乖離を比較しており、観測分布の分位点からの乖離幅が小さくなる確率分布を事前に準備した8分布から抽出することを基本としている。しかしながら、「低位安定期」においてはファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布が存在すれば、その確率分布を選択するという条件を付ける。

「低位安定期」以外の時期については、ほとんどの期間でファットテイル性の問題の影響を受けてしまう可能性が高い。少なくとも「低位安定期」だけは、ファットテイル性の問題の影響を受けずに近似できる確率分布が存在する限り、影響を受

けずに近似できる確率分布を仮定することが望ましい。STEP2 では、結果として 1～2 個程度の確率分布を抽出する。ただし、STEP1 で分布全体の適合度が低いと判定された確率分布はその時点で対象外とし、STEP2 で抽出されることはない。

[1] 「低位安定期」においては、ファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布が存在すれば、その確率分布を優先的に抽出する。ただし、正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定値より小さくなる非正規分布は除外している。

[2] 「変動期」と「高位安定期」については、ファットテイル判定により損失率の観測分布の 99%分位点からの乖離幅が小さくなる確率分布を抽出する。

※表 5-1、表 5-2 の中での「ファットテイル判定」の表記については、以下の通り。

○：ファットテイル性の問題の影響を受けていない

FT：ファットテイル性の問題の影響を受けている

STEP3：優先度判定

STEP1 と STEP2 の各結果を考慮して、適合度判定及びファットテイル判定のうち、いずれの結果を優先するかを考慮して確率分布を選定する。本章ではファットテイル性の問題がより少なくなるような確率分布を選択することを優先する。

STEP4：連続性判定

STEP3 で選定された分布を仮定して実際に Value-at-Risk 推定を計測する。Value-at-Risk 推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮した上で最終的に 1 つの確率分布を選択する。ここで懸念される事象は、本来、標準偏差等の値から類推して Value-at-Risk 推定値が大きくなると予想できるにもかかわらず、Value-at-Risk 推定値が小さくなってしまふ、あるいは Value-at-Risk 推定値が小さくなると予想できるにもかかわらず、Value-at-Risk 推定値が大きくなってしまふという、まれに生じる事象である。この事象に対応すべく Value-at-Risk 推定の推移の連続性を考慮することを加えている。

この時の推移の基準として、関連性が強いとされる「基本分布群」の 4 分布の推移を参考とする。さらに、ファットテイル性の問題に抵触する可能性が高い「変動

期」と「高位安定期」については、その影響度を算出して示す。

5.3.2 保有期間 1 日の分布選択

5.3.1 において説明した“4STEP-procedure”に従い、保有期間 1 日の分布選択における各 STEP での結果を示す。

表 5-1 4STEP-procedure（保有期間：1 日）は、保有期間 1 日の分布選択において“4STEP-procedure”に基づいて判定した結果の表である。以下、2008 年 9 月 10 日を例として、この表の読み方を示す。

まず STEP1 では、適合性の検定によりジョンソン SU 分布、正規分布、一般化ロジスティック分布、ロジスティック分布、ワイブル分布、双曲線正割分布の 6 分布が抽出される。この STEP1 の時点でラプラス分布は除外されており、次のファットテイル判定のプロセスにおいては他の分布に比べてラプラス分布が優位となるが抽出されることはない。

STEP2 では、ファットテイル判定により一般化ロジスティック分布と双曲線正割分布が選定される。右に各確率分布の 99%分位点の値を表示している。なお、本章で想定した株式と為替の合算のケースでは、2008 年 9 月 10 日は「低位安定期」とは言えない状況となっている。為替（円／ドル）においてすでに変動が始まっており、その影響を少なからず受けていることが原因となっている。とはいえ、STEP2 のファットテイル判定では、分布の左裾においても Value-at-Risk 推定値が比較的大きくなる一般化ロジスティック分布が選定されるため、2008 年 9 月 10 日のファットテイル判定は「○」表示となる。

STEP3 では、STEP1 と STEP2 の抽出結果を考慮しながら、ファットテイル判定を優先しているため、STEP2 で選定された一般化ロジスティック分布を採用する。

最後に STEP4 では、Value-at-Risk 推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮した上で選定するとしており、2008 年 9 月 10 日では特に方向性・連続性に問題がないため、最終選定結果は一般化ロジスティック分布となった。

同様にして、2008 年 10 月 14 日での最終結果は、ラプラス分布となり、2008 年 11 月 19 日での最終結果も、ラプラス分布となった。

表 5-1 STEP3, STEP4 では FT リスク比率 (Fat-tail Risk) を算出している。これは次式のとおり 99%分位点に対する影響度 ([99%分位点－観測値]を絶対値で表記)の割合を示している。

$$\text{FT リスク比率} = \left| \frac{99\% \text{分位点} - \text{観測値}}{\text{観測値}} \right| \quad (5.2)$$

2008年9月10日～9月12日の3日間では選定された一般化ロジスティック分布はファットテイル問題の影響を受けていない。同じく2008年10月14日～10月15日の2日間でも選定されたラプラス分布はファットテイル問題の影響を受けていない。

表 5-1 で網掛けとなっている2008年10月16日では FT リスク比率が 9.5%となっており、10%を超えてないが大きな数値といえよう。

2008年11月19日からの3日間では FT リスク比率が 2%前後となり、結果数値が1桁であることから影響は小さいことがわかる。

保有期間1日におけるファットテイル問題の影響の分析では、2008年10月16日はイベント直後であり、FT リスク比率は大きな数値となった。しかしながら、約1か月後の、2008年11月19日には FT リスク比率が小さくなることから、イベント直後の一定の期間についてはファットテイル問題の影響を受ける期間として注視する必要がある。

表 5-1 4STEP-procedure (保有期間：1 日)
表における各確率分布の略記については、

HSecant：双曲線正割分布

SB：ジョンソン SB 分布

SU：ジョンソン SU 分布

GL：一般化ロジスティック分布

W3P：ワイブル分布 (3 パラメータ) とする。

STEP1						
計測基準日	第1順位	第2順位	第3順位	第4順位	第5順位	第6順位
2008/9/10	SU 0.271	Normal 0.354	GL 0.358	Logistic 0.472	W3P 0.505	HSecant 0.913
2008/9/11	SU 0.274	Normal 0.344	GL 0.386	W3P 0.482	Logistic 0.510	HSecant 0.985
2008/9/12	SU 0.267	Normal 0.361	GL 0.377	W3P 0.464	Logistic 0.518	HSecant 0.987
2008/10/14	GL 0.331	HSecant 0.472	Logistic 0.618	Laplace 0.955	SU 1.097	
2008/10/15	GL 0.325	HSecant 0.459	Logistic 0.606	Laplace 0.943	SU 1.073	
2008/10/16	GL 0.374	HSecant 0.622	SU 0.789	Logistic 0.911	Laplace 0.926	
2008/11/19	Laplace 0.444	SU 0.498	HSecant 0.519	GL 0.547	Logistic 1.013	
2008/11/20	Laplace 0.468	SU 0.554	HSecant 0.568	GL 0.576	Logistic 1.077	
2008/11/21	Laplace 0.515	SU 0.546	GL 0.547	HSecant 0.561	Logistic 1.048	

STEP2					
計測基準日	ファットテイル判定	第1順位	99%分位点	第2順位	99%分位点
2008/9/10	○	GL	-3.706%	HSecant	-3.630%
2008/9/11	○	GL	-3.720%	HSecant	-3.643%
2008/9/12	○	GL	-3.733%	HSecant	-3.636%
2008/10/14	○	La	-4.688%	HSecant	-4.489%
2008/10/15	○	La	-4.690%	HSecant	-4.491%
2008/10/16	FT	La	-4.897%		
2008/11/19	FT	La	-5.724%		
2008/11/20	FT	La	-5.760%		
2008/11/21	FT	La	-5.760%		

STEP3 / STEP4				
計測基準日	観測値	選定分布	影響度	FTリスク比率
2008/9/10	-3.671%	GL	-	-
2008/9/11	-3.671%	GL	-	-
2008/9/12	-3.671%	GL	-	-
2008/10/14	-4.436%	La	-	-
2008/10/15	-4.436%	La	-	-
2008/10/16	-5.413%	La	0.516%	9.5%
2008/11/19	-5.873%	La	0.149%	2.5%
2008/11/20	-5.873%	La	0.113%	1.9%
2008/11/21	-5.873%	La	0.113%	1.9%

(出所) 筆者作成

5.3.3 保有期間 5 日の分布選択

“4STEP-procedure” に従い、保有期間 5 日の分布選択における各 STEP での結果を示す。表 5-2 4STEP-procedure（保有期間：5 日）においては、たとえば 2008 年 9 月 10 日を例として“4STEP-procedure”に基づいて判定していく。

まず STEP1 では、適合性の検定によりジョンソン SB 分布、ワイブル分布（3 パラメータ）、正規分布、一般化ロジスティック分布、ロジスティック分布の 5 分布が抽出される。

STEP2 では、ファットテイル判定の条件に抵触したことにより、ファットテイル性の問題に抵触しない分布としてロジスティック分布が抽出される。表中では右にロジスティック分布の 99%分位点-7.614 と表示しており、STEP3 の観測値-6.578 との乖離は大きい。

STEP3 では、STEP1 と STEP2 の選定結果を考慮し、観測値の分位点と比較して乖離の小さい確率分布を基準として、ファットテイル性の問題の少ない確率分布を有効と判定している。ここではファットテイル判定の条件に抵触したことにより、STEP2 に従いロジスティック分布を採用する。

STEP4 では、Value-at-Risk 推定値の変動の方向性や推移の連続性を考慮した上で選定するとしており、2008 年 9 月 10 日では特に方向性・連続性に問題がないため、最終選定結果はロジスティック分布となる。

同様にして、2008 年 10 月 14 日での最終結果は、ジョンソン SU 分布となり、2008 年 11 月 26 日での最終結果も、ジョンソン SU 分布となる。

表 5-1 同様、表 5-2 STEP3 / STEP4 では FT リスク比率を算出している。2008 年 9 月 10 日～9 月 12 日の 3 日間では選定されたロジスティック分布はファットテイル問題の影響を受けていない。2008 年 10 月 14 日～10 月 16 日の 3 日間では FT リスク比率は 19%半ばとなり、20%を超えないが影響は大きい。2008 年 11 月 19 日～11 月 21 日の 3 日間では FT リスク比率は 23%半ばとなり、20%を超えるため影響は非常に大きい。つまり、この結果を受けて相当に注意をするべき時期となっているこ

とを認識しておく必要がある。

保有期間 5 日におけるファットテイル問題の影響の分析では、2008 年 10 月 14 日～10 月 16 日の 3 日間はイベント直後であり、FT リスク比率は大きな数値となった。さらに、約 1 か月後の、2008 年 11 月 19 日～11 月 21 日の 3 日間でも FT リスク比率はさらに大きい数値なることから、保有期間 5 日においてはイベント発生以降、相当の期間に渡りファットテイル問題の影響を受ける期間として、特に注視する必要がある。

表 5-2 4STEP-procedure (保有期間：5 日)
表における確率分布の略記については、表 5-1 (保有期間：1 日)と同様である。

STEP1					
計測基準日	第1順位	第2順位	第3順位	第4順位	第5順位
2008/9/10	SB 0.376	W3P 0.419	Normal 0.466	GL 0.914	Logistic 1.219
2008/9/11	SB 0.408	W3P 0.456	Normal 0.502	GL 0.966	Logistic 1.278
2008/9/12	SB 0.399	W3P 0.444	Normal 0.486	GL 0.940	Logistic 1.249
2008/10/14	GL 0.569	Logistic 0.832	HSecant 0.965	SU 0.999	W3P 1.071
2008/10/15	GL 0.579	Logistic 0.815	HSecant 0.922	SU 1.041	W3P 1.146
2008/10/16	GL 0.561	Logistic 0.767	HSecant 0.862	SU 1.046	W3P 1.186
2008/11/19	SU 0.558	GL 0.708	Laplace 0.725	HSecant 0.893	
2008/11/20	SU 0.556	GL 0.706	Laplace 0.715	HSecant 0.880	
2008/11/21	SU 0.561	GL 0.711	Laplace 0.712	HSecant 0.873	

STEP2			
計測基準日	ファットテイル判定	第1順位	99%分位点
2008/9/10	○	Logistic	-7.614%
2008/9/11	○	Logistic	-7.630%
2008/9/12	○	Logistic	-7.945%
2008/10/14	FT	SU	-11.270%
2008/10/15	FT	SU	-11.260%
2008/10/16	FT	SU	-11.253%
2008/11/19	FT	SU	-12.696%
2008/11/20	FT	SU	-12.669%
2008/11/21	FT	SU	-12.639%

STEP3 / STEP4				
計測基準日	観測値	選定分布	影響度	FTリスク比率
2008/9/10	-6.578%	Logistic	-	-
2008/9/11	-6.578%	Logistic	-	-
2008/9/12	-6.578%	Logistic	-	-
2008/10/14	-14.006%	SU	2.736%	19.5%
2008/10/15	-14.006%	SU	2.746%	19.6%
2008/10/16	-14.006%	SU	2.753%	19.7%
2008/11/19	-16.563%	SU	3.867%	23.3%
2008/11/20	-16.563%	SU	3.894%	23.5%
2008/11/21	-16.563%	SU	3.924%	23.7%

(出所) 筆者作成

5.4 結果分析と検証

追加した「拡張分布群」であるワイブル分布（3 パラメータ）及び一般化ロジスティック分布の 2 分布の特徴を示すと、ワイブル分布は正規分布に近い形状の時、つまり「低位安定期」において当てはまりが良いことがわかる。一方、一般化ロジスティック分布は全般的に適合度が高いが、「低位安定期」では推定値が大きくなりすぎるため、STEP2 の段階で除外される可能性が高くなる。本章の分析では、保有期間 1 日における 2008 年 9 月 1 日より 10 月 10 日までが当てはまり、歪んだ分布に適合することがわかる。また、一般化ロジスティック分布の基礎となる分布がロジスティック分布であるため、尖度の大きい分布、すなわち、尖った分布は視覚的には適合度が良く見えない。

本章では、株式 VaR と為替 VaR の相関関係を考察するために、最終的に選定された確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定値（セレクション）と株式 VaR と為替 VaR の単純合算した Value-at-Risk 推定値を比較検討した。また、検証として実現値と推定した Value-at-Risk 値との比較によるバックテストを実施した。保有期間 1 日では第 2 章で実施したバックテストと同様に、バーゼル銀行監督委員会が規定した「トレーディング勘定のバックテストのフレームワーク」を利用した方法によりバックテストを実施する。評価期間を 250 営業日とし 2009 年 9 月 1 日を基準としてそこから 250 日分、前に遡って評価期間を抽出する。一方、保有期間 5 日では上記の方法の前提に当てはまらないため、評価期間を 60 営業日とし 2008 年 12 月 1 日を基準としてそこから 60 日分、前に遡って抽出した上で、単純に損失率の実現値と推定した Value-at-Risk 値とを比較して超過回数の実数を比較する。

5.4.1 Value-at-Risk 推定結果の分析

“4STEP-procedure”により選定した確率分布を表 5-3、表 5-4 に示す。

表 5-3 4STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間：1 日)

4STEP-procedureにより 選定した分布		4STEP-procedureにより 選定した分布		4STEP-procedureにより 選定した分布	
2008/9/1	GL	2008/10/1	GL	2008/11/4	Laplace
2008/9/2	GL	2008/10/2	GL	2008/11/5	Laplace
2008/9/3	GL	2008/10/3	GL	2008/11/6	Laplace
2008/9/4	GL	2008/10/6	GL	2008/11/7	Laplace
2008/9/5	GL	2008/10/7	GL	2008/11/10	Laplace
2008/9/8	GL	2008/10/8	GL	2008/11/11	Laplace
2008/9/9	GL	2008/10/9	GL	2008/11/12	Laplace
2008/9/10	GL	2008/10/10	GL	2008/11/13	Laplace
2008/9/11	GL	2008/10/14	Laplace	2008/11/14	Laplace
2008/9/12	GL	2008/10/15	Laplace	2008/11/17	Laplace
2008/9/16	GL	2008/10/16	Laplace	2008/11/18	Laplace
2008/9/17	GL	2008/10/17	Laplace	2008/11/19	Laplace
2008/9/18	GL	2008/10/20	Laplace	2008/11/20	Laplace
2008/9/19	GL	2008/10/21	Laplace	2008/11/21	Laplace
2008/9/22	GL	2008/10/22	Laplace	2008/11/25	Laplace
2008/9/24	GL	2008/10/23	Laplace	2008/11/26	Laplace
2008/9/25	GL	2008/10/24	Laplace	2008/11/27	Laplace
2008/9/26	GL	2008/10/27	Laplace	2008/11/28	Laplace
2008/9/29	GL	2008/10/28	Laplace		
2008/9/30	GL	2008/10/29	Laplace		
		2008/10/30	Laplace		
		2008/10/31	Laplace		

(出所) 筆者作成

保有期間 1 日では、為替の変動の影響を受け 9 月よりすでに「変動期」となっているため、その結果として 2008 年 9 月 1 日から 10 月 10 日までの期間は一般化ロジスティック分布が選定されている。それ以降の「高位安定期」ではラプラス分布が選定される。単独リスクファクターのケースとは大きく異なり、裾が厚くかつ中心で尖った分布形が特徴的であり、リスクレベルは高い状況となっている。

表 5-4 4STEP-procedure により選定した確率分布 (保有期間：5 日)

4STEP-procedureにより 選定した分布		4STEP-procedureにより 選定した分布		4STEP-procedureにより 選定した分布	
2008/9/1	Logistic	2008/10/1	Logistic	2008/11/4	SU
2008/9/2	Logistic	2008/10/2	Logistic	2008/11/5	SU
2008/9/3	Logistic	2008/10/3	Logistic	2008/11/6	SU
2008/9/4	Logistic	2008/10/6	Logistic	2008/11/7	SU
2008/9/5	Logistic	2008/10/7	Logistic	2008/11/10	SU
2008/9/8	Logistic	2008/10/8	SU	2008/11/11	SU
2008/9/9	Logistic	2008/10/9	SU	2008/11/12	SU
2008/9/10	Logistic	2008/10/10	SU	2008/11/13	SU
2008/9/11	Logistic	2008/10/14	SU	2008/11/14	SU
2008/9/12	Logistic	2008/10/15	SU	2008/11/17	SU
2008/9/16	Logistic	2008/10/16	SU	2008/11/18	SU
2008/9/17	Logistic	2008/10/17	SU	2008/11/19	SU
2008/9/18	Logistic	2008/10/20	SU	2008/11/20	SU
2008/9/19	Logistic	2008/10/21	SU	2008/11/21	SU
2008/9/22	Logistic	2008/10/22	SU	2008/11/25	SU
2008/9/24	Logistic	2008/10/23	SU	2008/11/26	SU
2008/9/25	Logistic	2008/10/24	SU	2008/11/27	SU
2008/9/26	Logistic	2008/10/27	SU	2008/11/28	SU
2008/9/29	Logistic	2008/10/28	SU		
2008/9/30	Logistic	2008/10/29	SU		
		2008/10/30	SU		
		2008/10/31	SU		

(出所) 筆者作成

保有期間 5 日では、「低位安定期」は STEP2 の条件にかかり、ファットテイル性の問題に抵触していない非正規分布であるロジスティック分布が選定されている。「変動期」以降、「高位安定期」までジョンソン SU 分布が選定されている。

次に Value-at-Risk 推定を実施してその結果を図 5-1, 図 5-2 に示した。

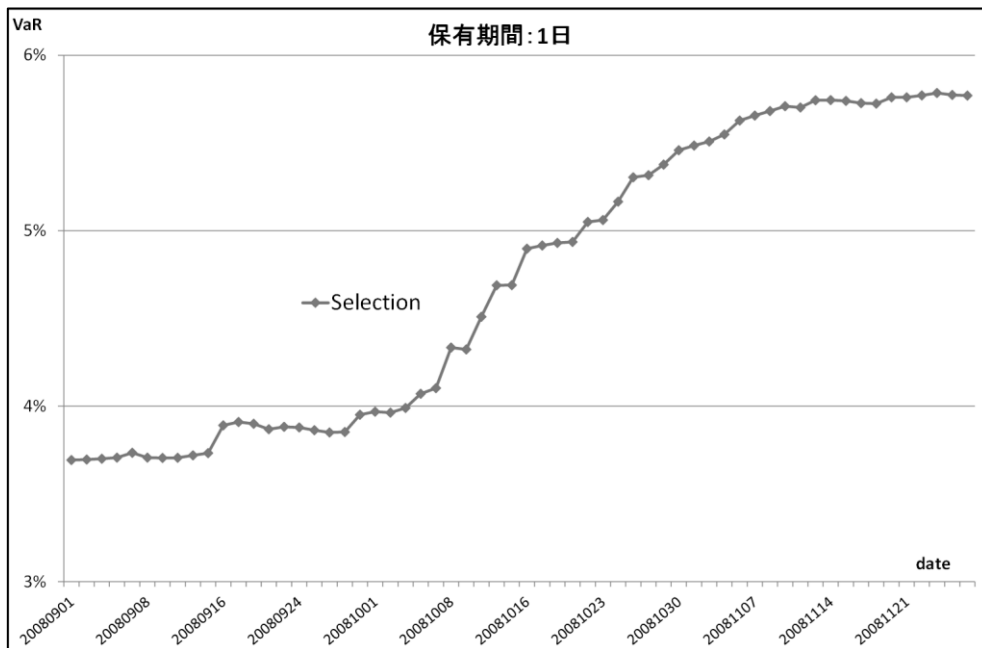
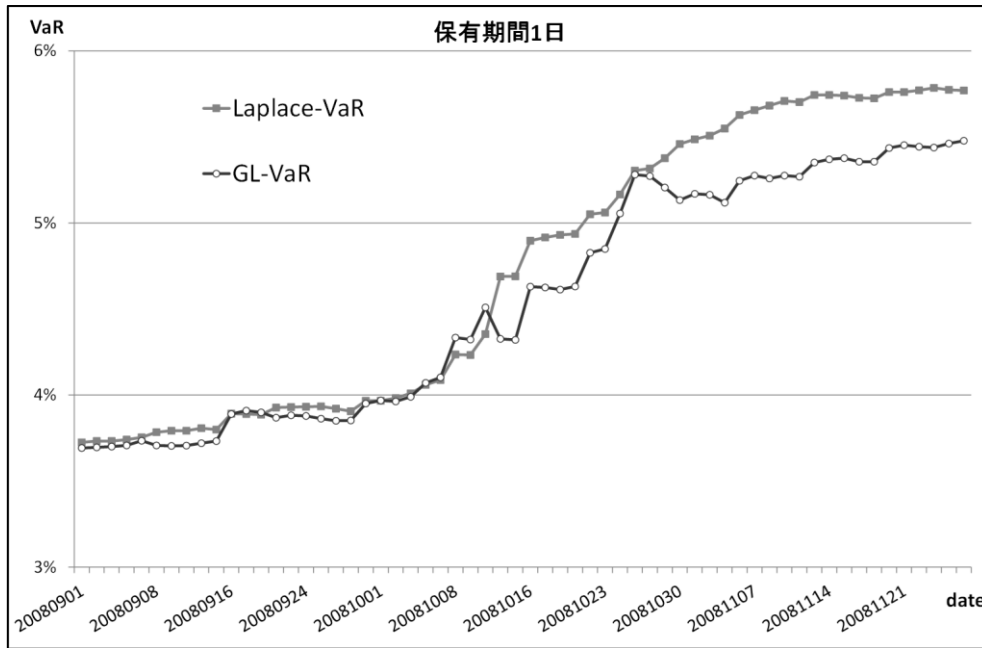
図 5-1 の上図（選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定）においては、最終選定した確率分布である Laplace-VaR と GL-VaR を示しており、2008 年 10 月 10 日まではほとんど同じレベルで推移している。その後も「変動期」では GL-VaR は 2008 年 10 月 27 日・28 日において Laplace-VaR に接近し、多少のばらつきが生じているものの、Laplace-VaR よりは一段低いレベルで落ち着いていく様子が見てとれる。

図 5-1 の下図（セレクションの推移とヒストリカル法による推移）においては、選定されたセレクションの推移とヒストリカル法による推移を比較している。ヒストリカル法による推移は 3 段階の上昇という特徴が顕著に示されている。1 段目 10 月上旬では日次で 1%弱の上昇を示し、2 段目 10 月中旬では日次で 0.5%弱の上昇を示している。3 段目 10 月下旬では日次で 0.5%弱の小幅な上昇を示している。一方、セレクションの推移ではヒストリカル法による推移のような急激な上昇という特徴を示しておらず、なだらかな上昇を示している。

図 5-1 では“4STEP-procedure”により選定した確率分布を仮定して保有期間 1 日の Value-at-Risk 推定結果を図により概観した。選定されたセレクションの推移は基準となる Normal-VaR の推移とほぼ平行に、すなわち、比例的に推移していることがわかる。ただし、レベルは大きく乖離しており評価期間当初の 2008 年 9 月ではセレクションと Normal-VaR の乖離は 0.55%弱であったものが、評価期間終わりの 2008 年 11 月では 0.89%と拡大している。

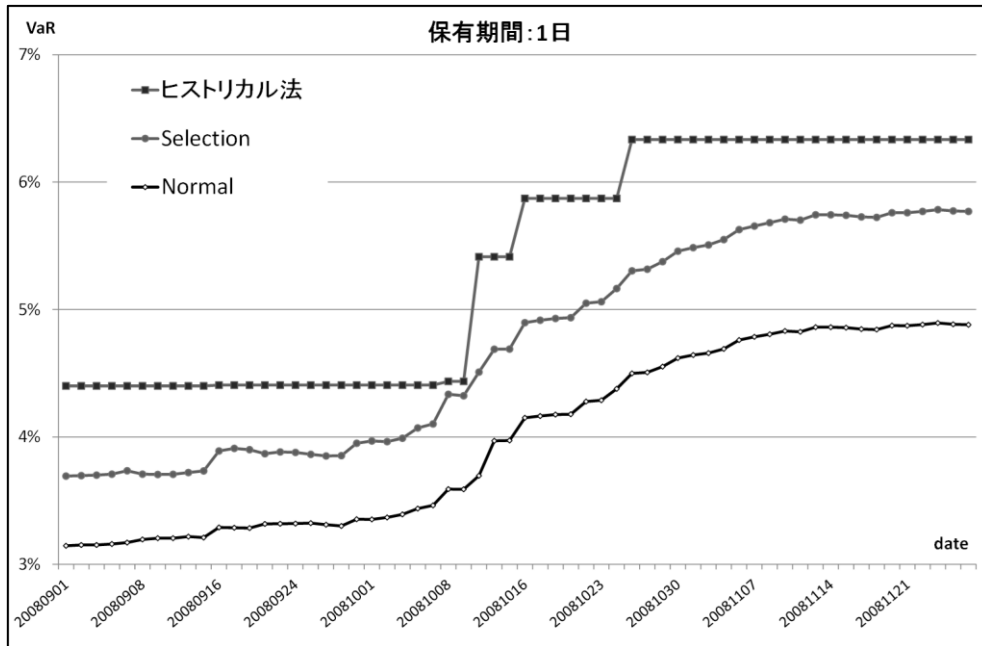
図 5-1 Value-at-Risk 推定 (保有期間：1 日)
 Selection：最終的に選定した確率分布 (セレクションと呼ぶ) を仮定

選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定



(出所) 筆者作成

セレクションの推移とヒストリカル法による推移



(出所) 筆者作成

図 5-2 の上図（選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定）において基本分布群である Logistic-VaR を観察すると、「低位安定期」のレベルは 7.5%~8%で推移し、「高位安定期」のレベルは 11%半ばで推移している。この間の「変動期」では 3 段階の上昇が発生し、2008 年 10 月 8 日~10 日の 3 日間で 1.2%の上昇、2008 年 10 月 27 日~28 日の 2 日間で 0.8%の上昇、2008 年 11 月 4 日~5 日の 2 日間で 0.7%の上昇となっている。

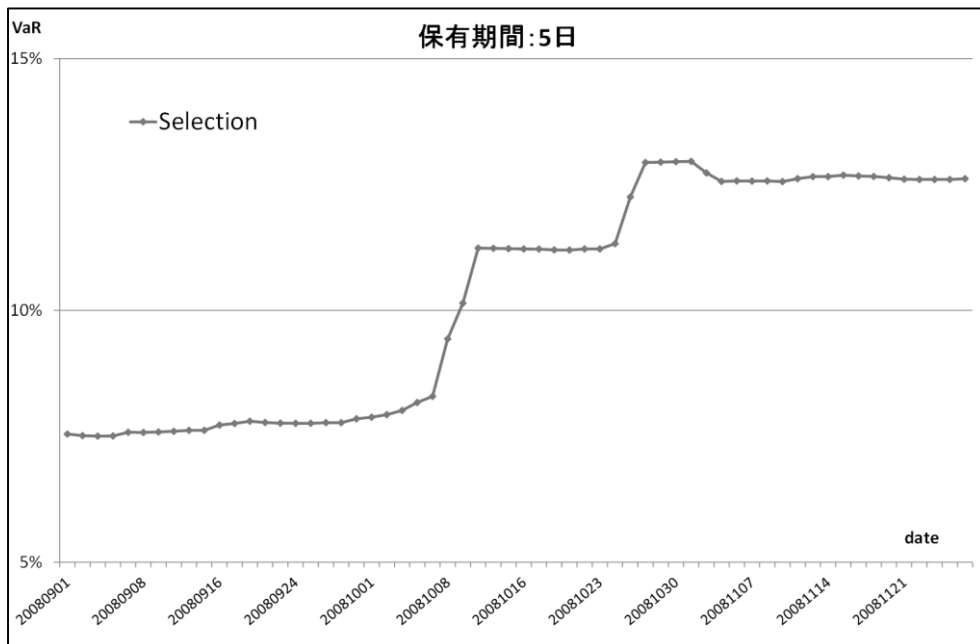
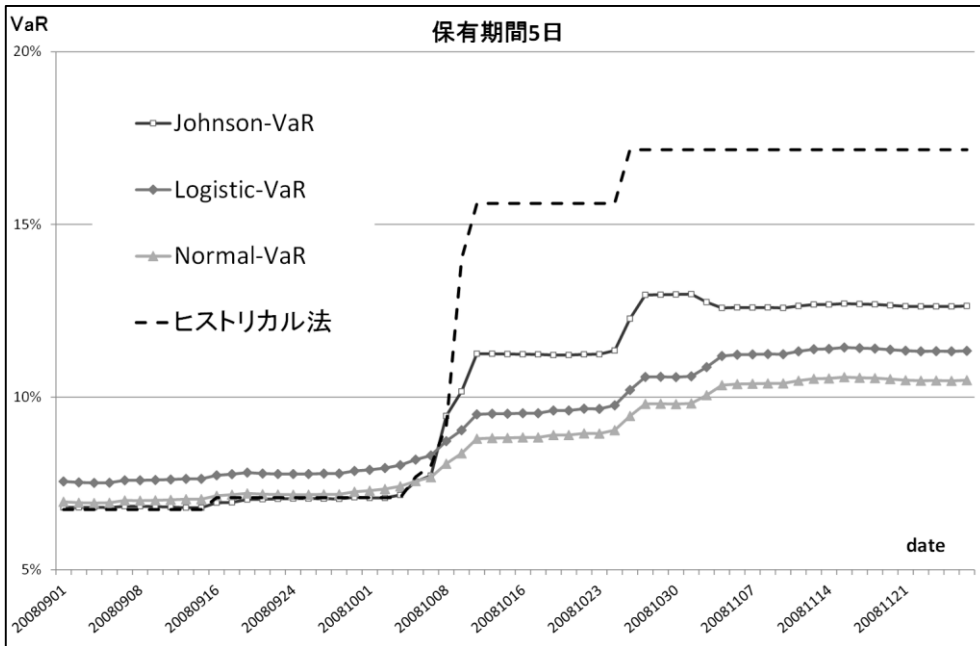
一方、Johnson-VaR を観察すると、「低位安定期」のレベルは 7%前後で推移し、Normal-VaR よりも小さく、ヒストリカル法より少し高めのレベルとなっている。「高位安定期」のレベルは 12%後半で推移している。この間の「変動期」では 2 段階の上昇が発生し、2008 年 10 月 8 日~10 日の 3 日間で 3.5%程度の上昇、2008 年 10 月 27 日~28 日の 2 日間で 1.6%強の上昇となった。上図においては Logistic-VaR の推移と Johnson-VaR の推移とが交差する日が、選定される確率分布が移行する日となっている。

図 5-2 の下図（セレクションの推移とヒストリカル法による推移）においては、ヒストリカル法の推移は 2 段階の大幅な急上昇という特徴が顕著に示されている。また、セレクションの推移においてもヒストリカル法の推移まで顕著ではないが、2 段階の上昇という特徴が明らかに示されている。

図 5-2 では“4STEP-procedure”により選定した確率分布を仮定して保有期間 5 日の Value-at-Risk 推定結果を図により概観した。変動が大きくない期間については、選定されたセレクションの推移は基準となる Normal-VaR の推移と比例的に推移していることがわかる。正規分布による推移では 3 段階の上昇が見受けられるが、セレクションの推移では 2 段階の上昇を示しており、2008 年 11 月 4 日~5 日では逆方向の推移となっている。原因としては歪度の変動（値が大きくなる）が影響しているものと推測する。また、変動している期間については上昇率に違いがあるため、それぞれに異なる推移となっている。

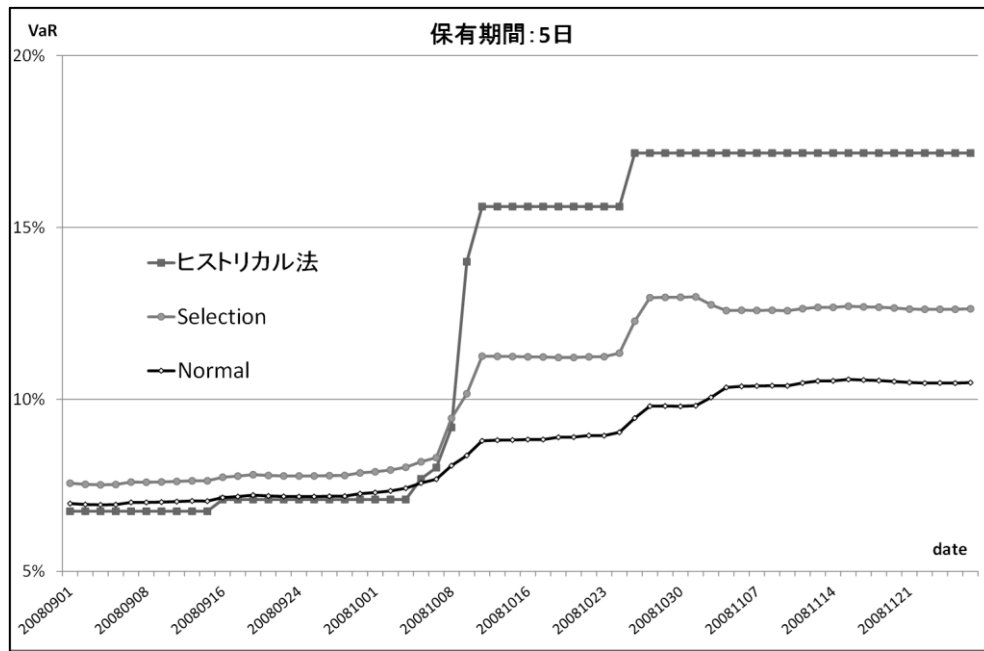
図 5-2 Value-at-Risk 推定 (保有期間：5 日)
 セレクション：最終的に選定した確率分布 (セレクションと呼ぶ) を仮定

選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定



(出所) 筆者作成

セレクションの推移とヒストリカル法による推移

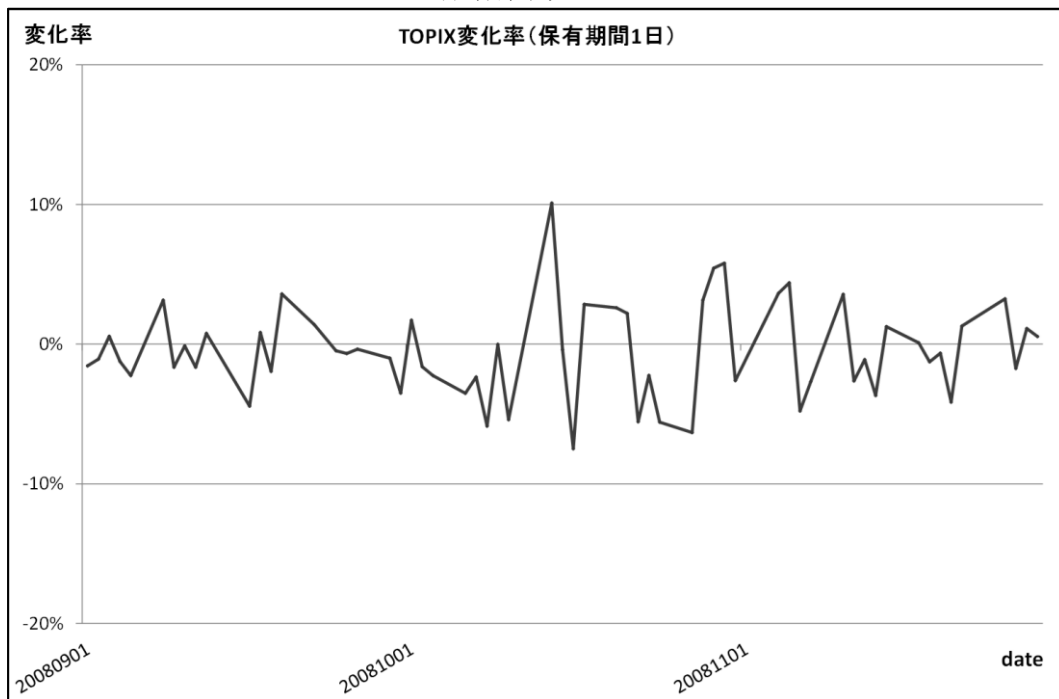


(出所) 筆者作成

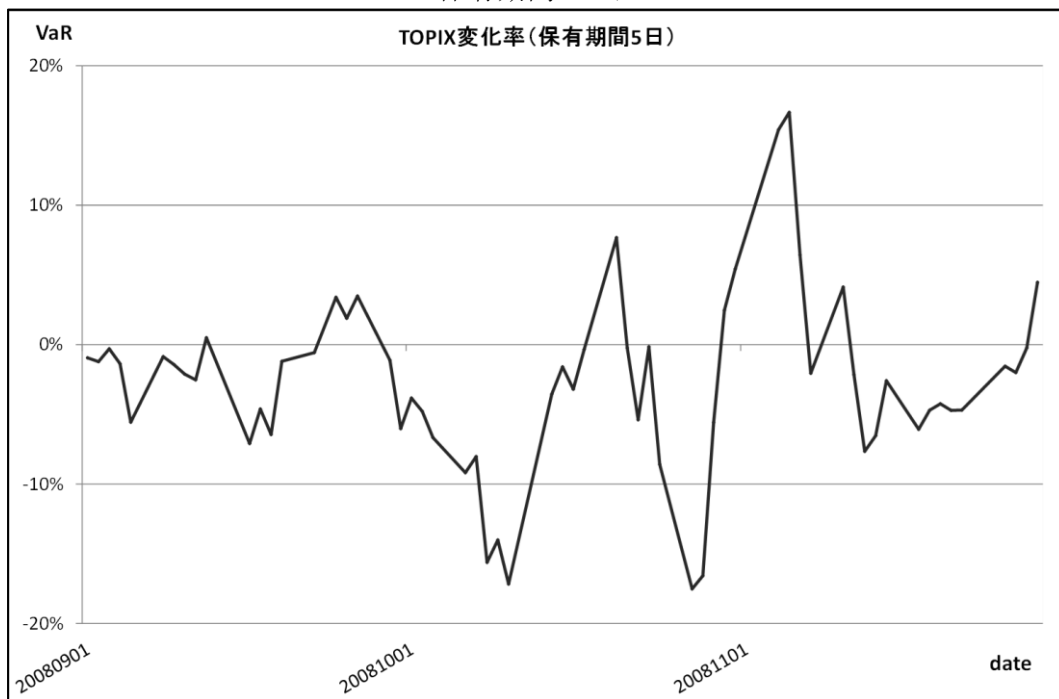
さらに、保有期間ごとの特徴的な推移を確認するため、変化率の推移を図 5.3 に示す。

図 5-3 保有期間別の変化率

保有期間：1 日



保有期間：5 日



(出所) 東京証券取引所

保有期間 1 日では幾分マイナスに偏っている傾向が見受けられるが、ゼロを中心にプラスマイナスにはほぼ均等に変動している様子が見て取れる。しかしながら、10 月 16 日には -7.5%程度の大きな変動が発生していることにより、極端な変動を示す原因となっていることがわかる。また、10 月 14 日には 10%程度の大きなプラス変動も発生しており、この影響も強く受けている。つまり、パラメータが平均と標準偏差の 2 つだけである正規分布を代表とする「基本分布群」では、プラスマイナスの符号に関係なく標準偏差が大きくなることにより Value-at-Risk 推定値は大きくなる。一方、「ジョンソン分布群」や「拡張分布群」では歪んだ分布に対応できるので、「基本分布群」とは異なった推移となることがある。

一方、保有期間 5 日ではマイナスに偏っている傾向が見受けられ、そのうえ保有期間 1 日の変化率より大きくなっていることが見て取れる。10 月 8 日～10 日の 3 日間では -15%程度の大きな変動が発生していることにより、極端な変動を示す原因となっていることがわかる。さらに 10 月 27 日～28 日の 2 日間でも -16%超の大きな変動が発生していることにより、2 回目の大きな変動を示す原因となっている。また、11 月 4 日～5 日の 2 日間には 15%超の大きなプラス変動が発生しており、この影響も強く受けている。パラメータが平均と標準偏差の 2 つだけである正規分布を代表とする「基本分布群」では、プラスマイナスの符号に関係なく標準偏差が大きくなることにより Value-at-Risk 推定値は大きくなる。

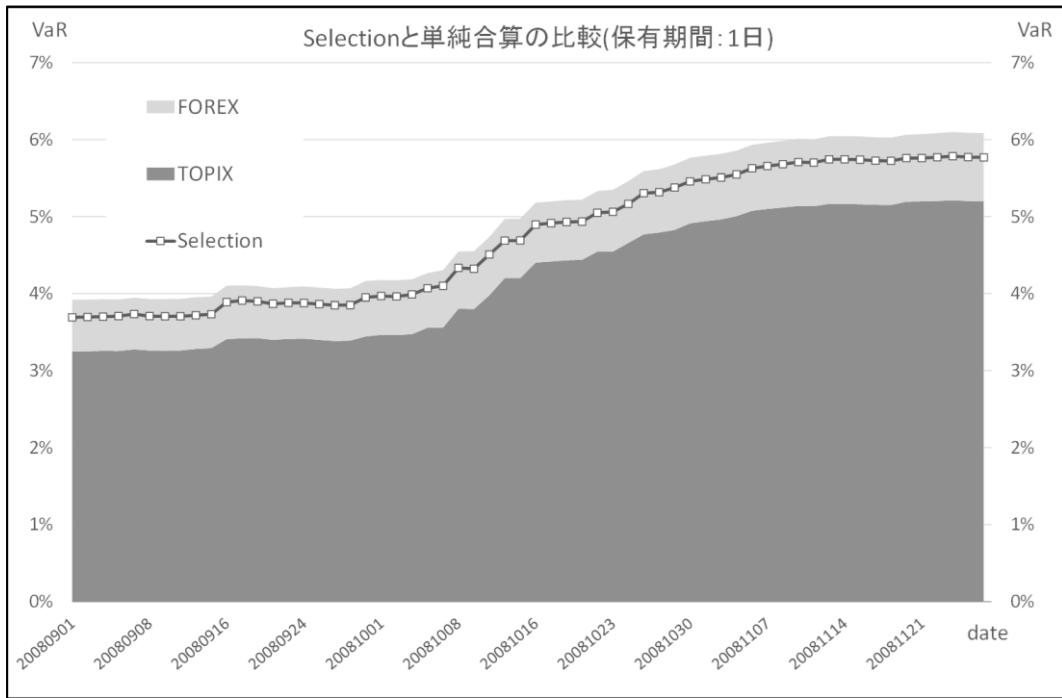
以上により、“4STEP-procedure”により選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定は、元となる変動率データの特徴をうまく反映しており、適切なリスク計測手法であることが示された。

5.4.2 株式 VaR と為替 VaR の相関の影響

株式 VaR と為替 VaR の相関の影響を確認するため、最終的に選定した確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定値（セレクション）と株式 VaR と為替 VaR の単純合算した Value-at-Risk 推定値を比較して図 5-4 に示す。

図 5-4 セレクションと単純合算の比較

(保有期間 1 日)

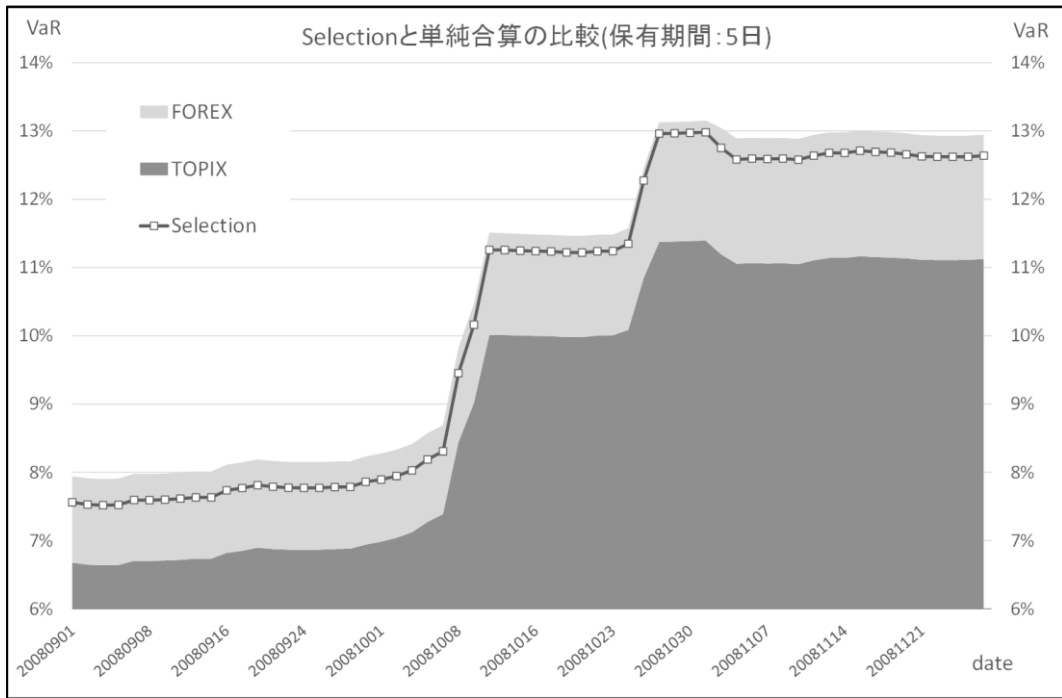


(出所) 筆者作成

図 5-4 のとおり，本章において設定したポートフォリオについては，1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法を使って推定した結果，リスクファクター相互の相関による若干の削減効果が見られる．まず，「低位安定期」において単純合算の Value-at-Risk 推定値に対する変化率を計算してみると -5.4% 程度であり，相応に相関の影響が反映されている．次に「変動期」でも -5.4% 程度となり，同様に相関の影響が認められた．さらに「高位安定期」では -5.2% 程度となり，相応に相関の影響がある．対象期間すべてにわたる相関の影響は -5.4% となり，保有期間 1 日の場合，各期を通して変化率に大きな変動は見られず，経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法におけるリスクファクター相互の相関によるリスク分散効果が認められる．

図 5-5 セレクションと単純合算の比較

(保有期間 5 日)



(出所) 筆者作成

図 5-4 と同様に、図 5-5 でもリスクファクター相互の相関によるリスク削減効果を考察する。まず「低位安定期」においては、単純合算の Value-at-Risk 推定値に対する変化率を計算してみると-4.8%程度であり、相応に相関の影響がある。次に「変動期」では-2.1%程度となり、相関によるリスク削減効果は若干減少している。さらに「高位安定期」では-2.4%程度となり、「低位安定期」の半分程度となり減少している。対象期間すべてにわたる相関の影響は-3.3%となり、保有期間 5 日の場合、安定期においてはリスクファクター相互の相関効果が認識されるが、変動期においてはその効果は減少していることがわかる。

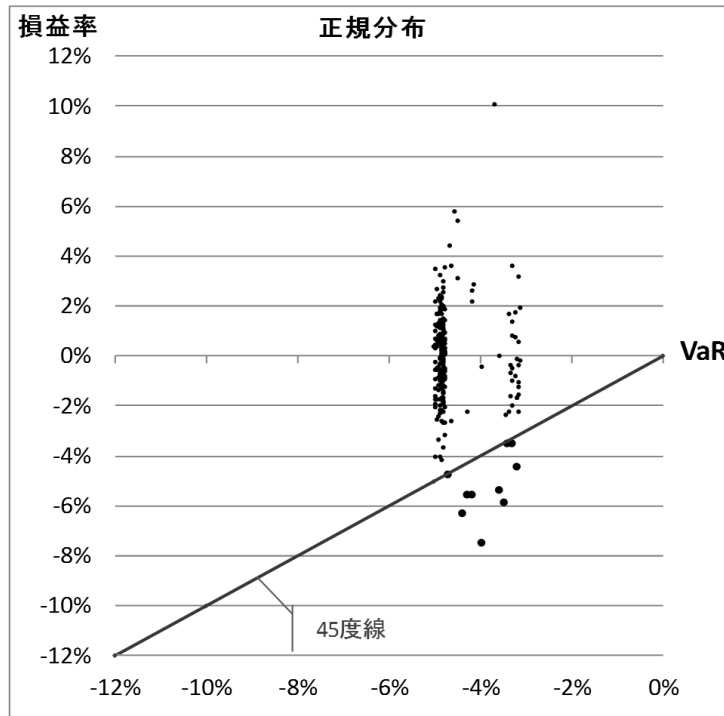
5.4.3 バックテストの結果

“4STEP-procedure”による確率分布の選択に対する妥当性検証としてバックテストを実施している。ただし、保有期間1日については250営業日分の観測データよりバックテストを実施しているが、保有期間5日についてはバーゼル銀行監督委員会が規定した「トレーディング勘定のバックテストのフレームワーク」の前提から外れるため、観測データ60営業日分について、単純に「推定値と実績値の比較」という観点から超過回数の実数を比較検討することとし、参考として示した。

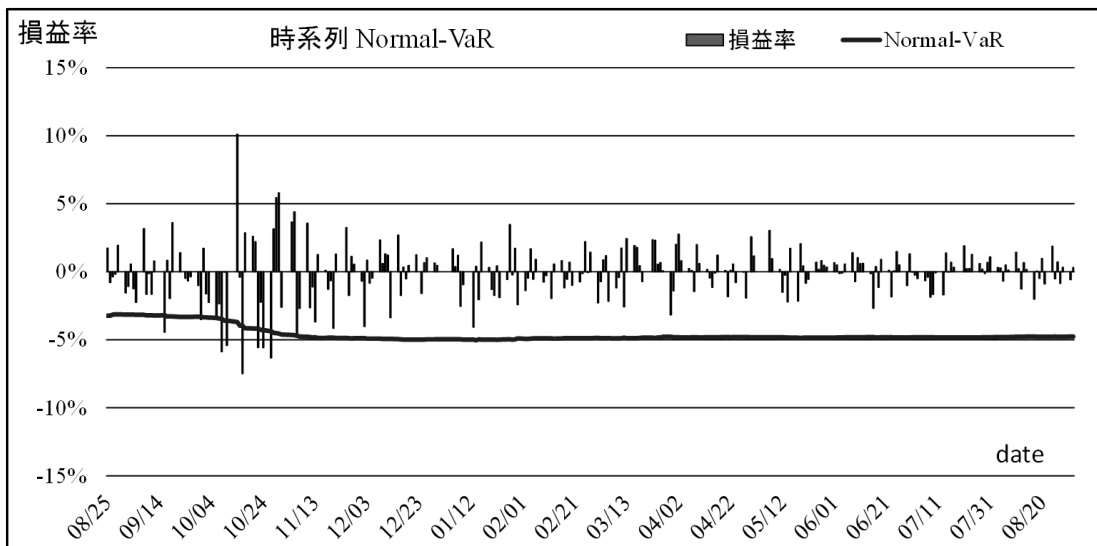
バーゼル銀行監督委員会が示すバックテストは「マーケット・リスクに対する所要自己資本額算出に用いる内部モデル・アプローチにおけるバックテスト」であり、ここでは正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定を基準として、その結果よりは良好であること、つまり、各非正規 VaR のバックテスト結果が Normal-VaR の超過回数よりも少ないことを確認することで、適用する非正規分布の適切性を判断する。

図 5-6 バックテストの結果(正規分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



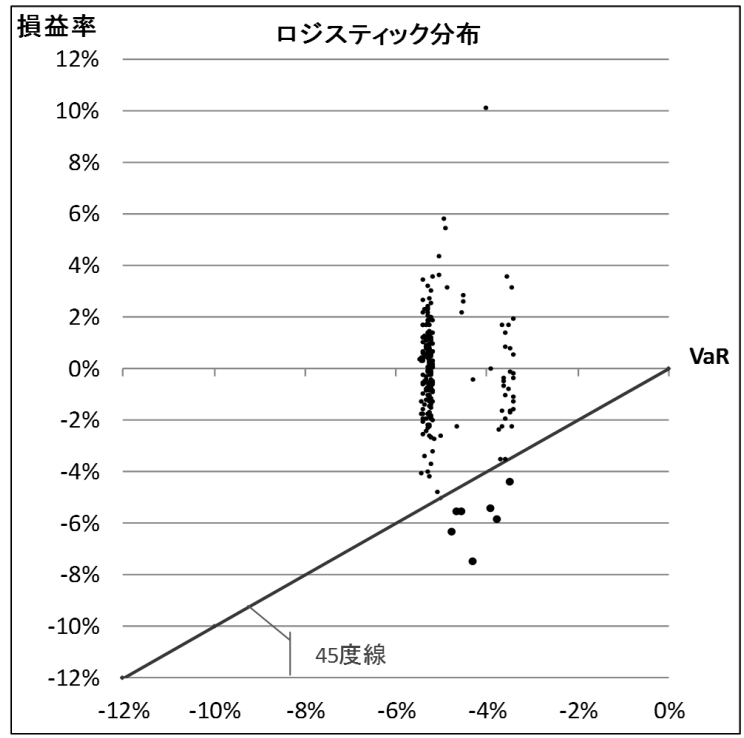
※超過回数は 250 回中, 10 回である.



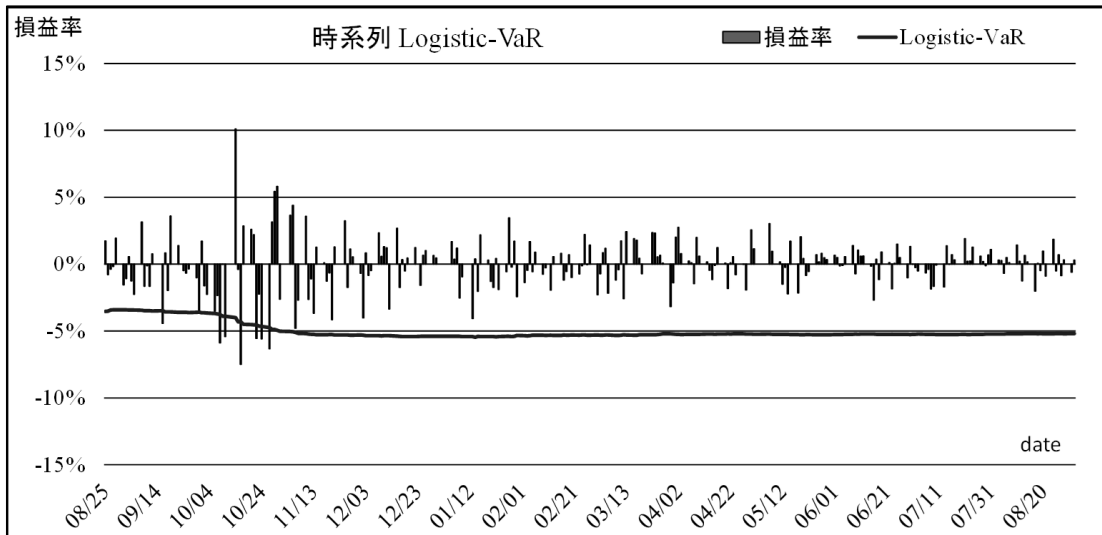
(出所) 筆者作成

図 5-7 バックテストの結果(ロジスティック分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



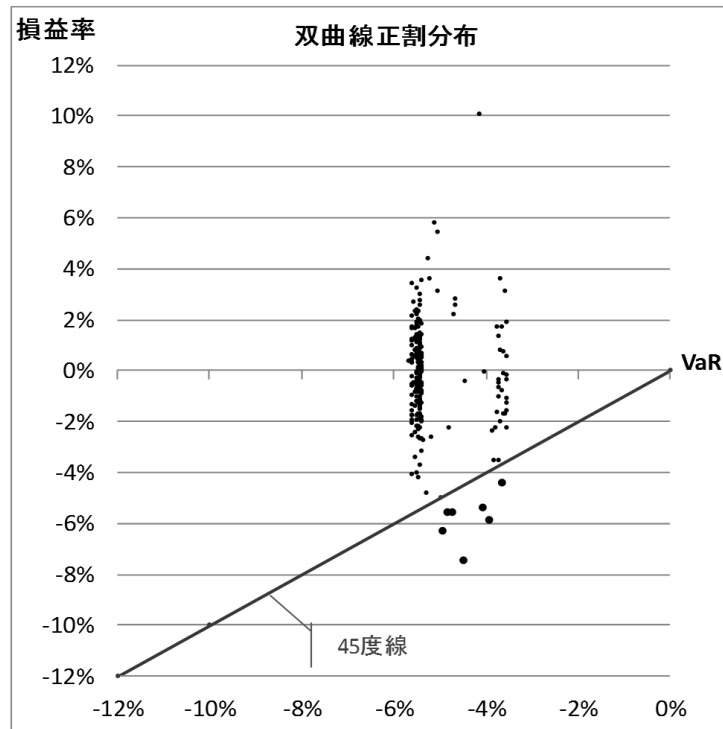
※超過回数は 250 回中, 7 回である.



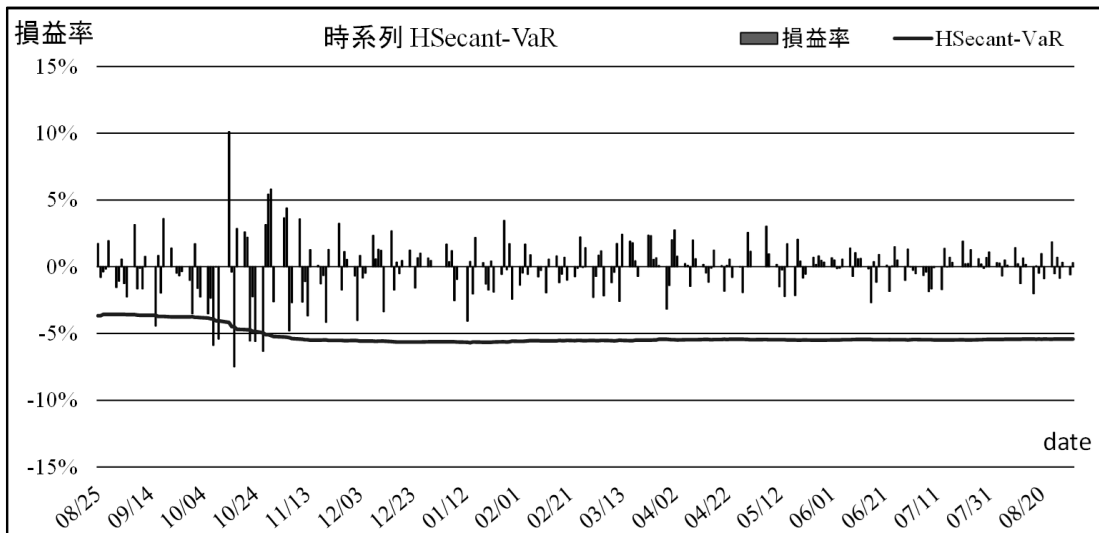
(出所) 筆者作成

図 5-8 バックテストの結果(双曲線正割分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



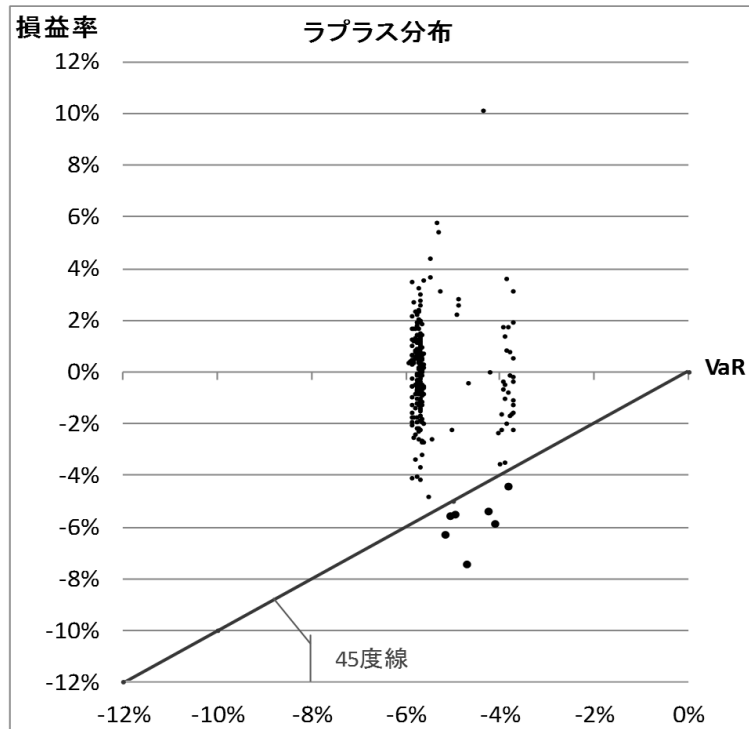
※超過回数は 250 回中, 7 回である.



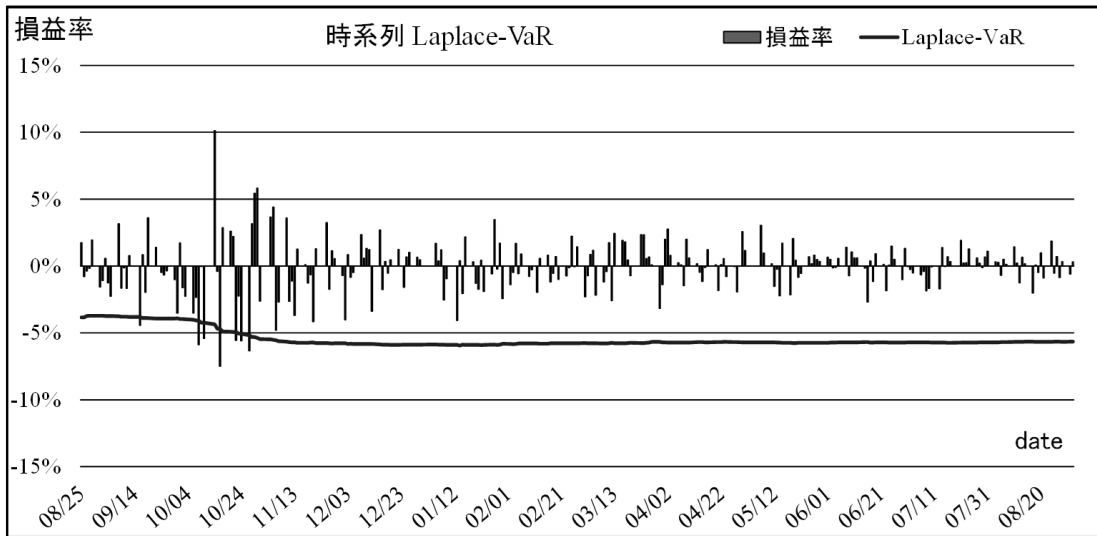
(出所) 筆者作成

図 5-9 バックテストの結果(ラプラス分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



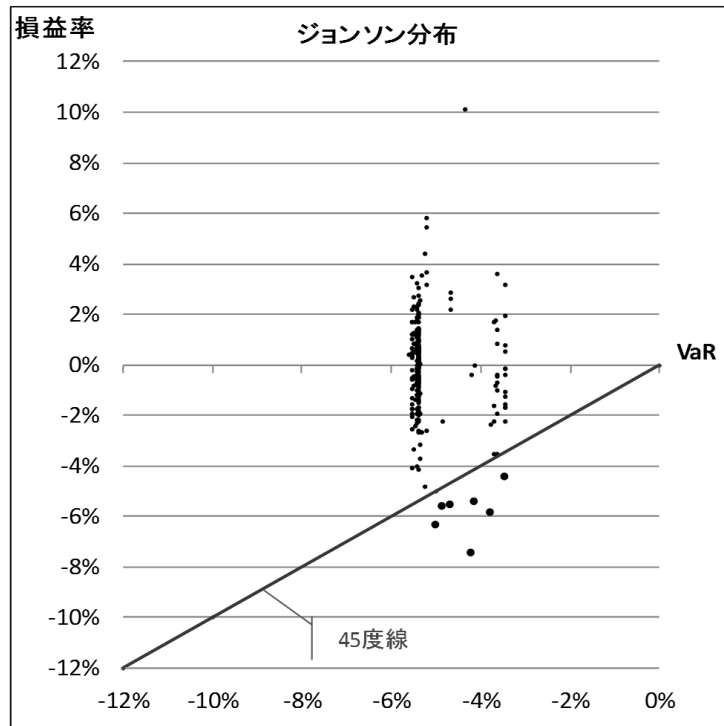
※超過回数は 250 回中, 7 回である.



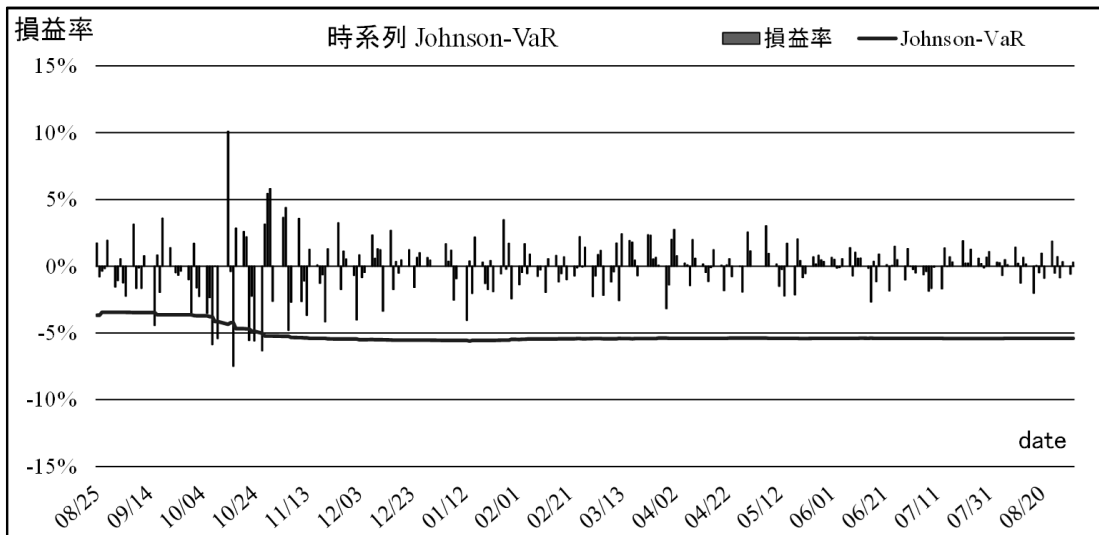
(出所) 筆者作成

図 5-10 バックテストの結果(ジョンソン分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



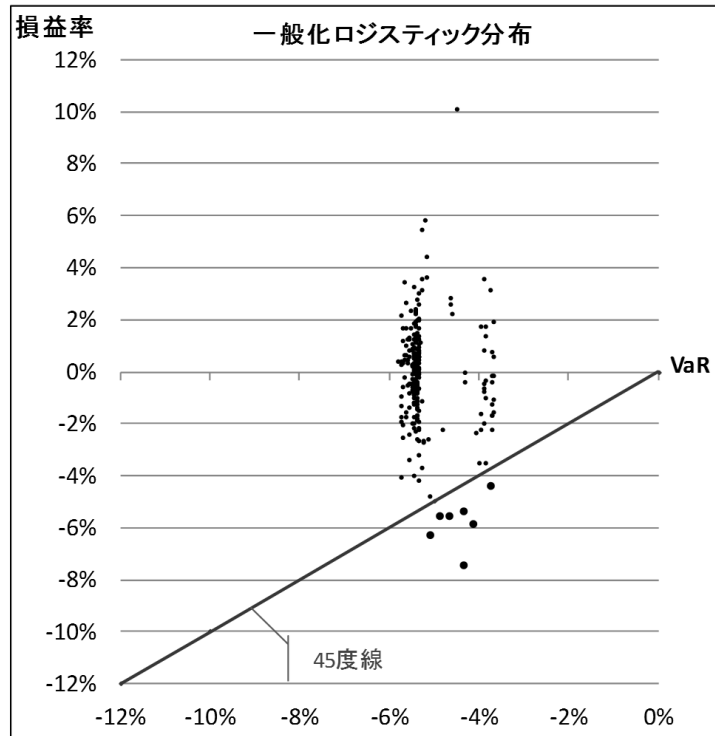
※超過回数は 250 回中, 7 回である.



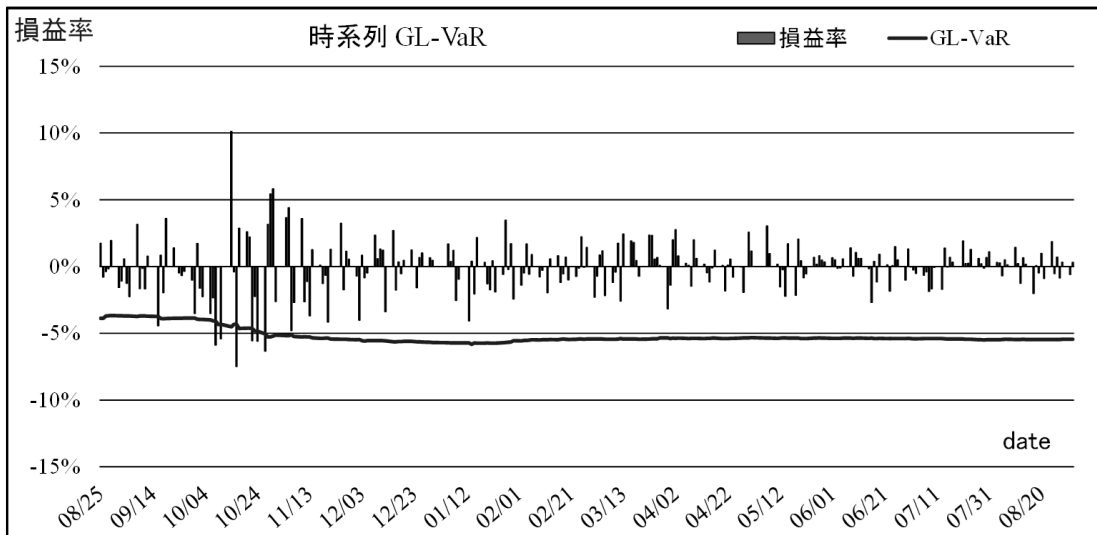
(出所) 筆者作成

図 5-11 バックテストの結果(一般化ロジスティック分布)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



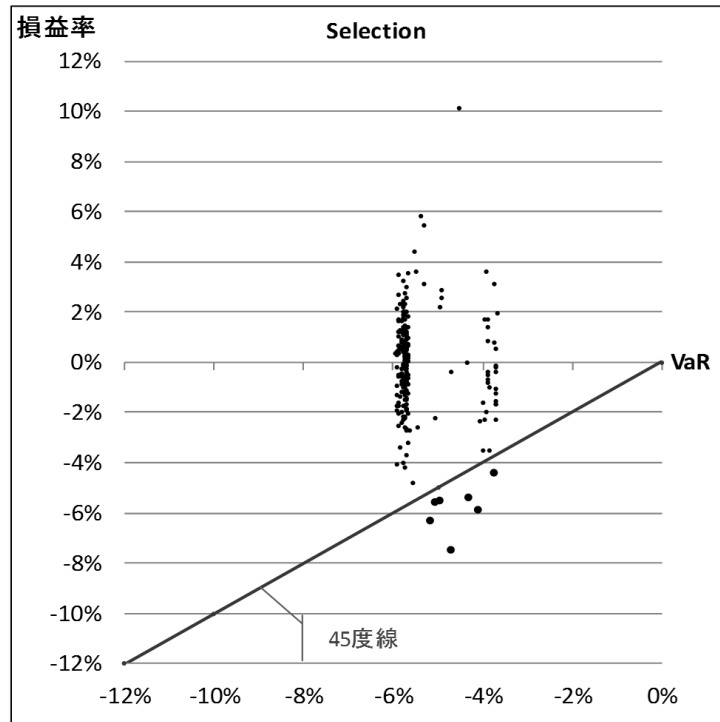
※超過回数は 250 回中, 9 回である.



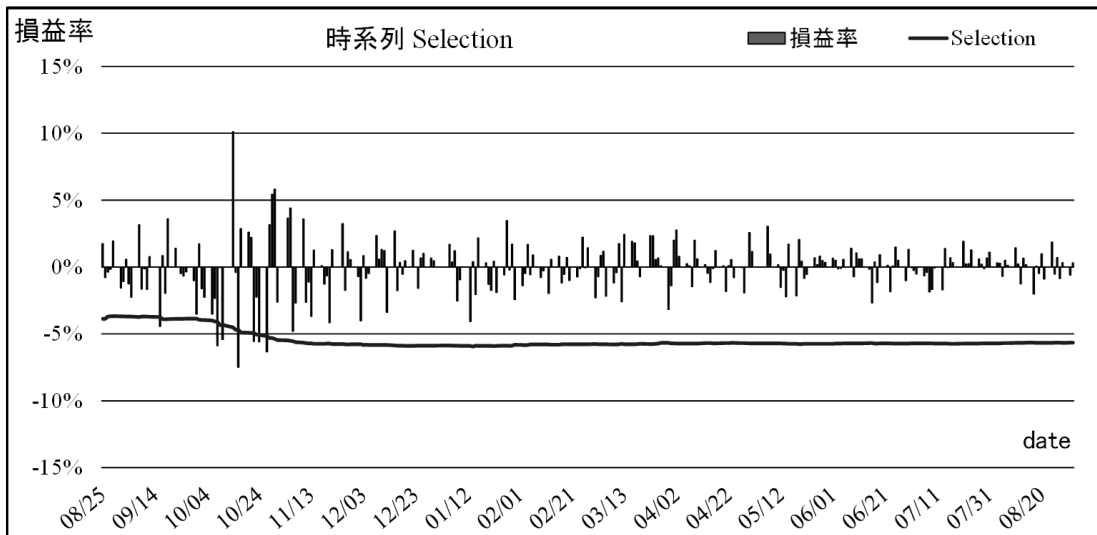
(出所) 筆者作成

図 5-12 バックテストの結果(Selection)

[保有期間 1 日 : 2008 年 8 月 25 日 ~ 2009 年 9 月 1 日]



※超過回数は 250 回中, 7 回である.



(出所) 筆者作成

表 5-5 バックテストの結果

[保有期間 1 日：2008 年 8 月 25 日～2009 年 9 月 1 日]

分布	超過回数
正規分布	10
ロジスティック分布	7
双曲線正割分布	7
ラプラス分布	7
ジョンソン分布	7
一般化ロジスティック分布	7
Selection	7
(参考)	
ヒストリカル法	5

(出所) 筆者作成

表 5-5 のとおり選定した確率分布による Value-at-Risk 推定値におけるバックテストの結果は、超過回数 7 回となり、超過回数が一番小さくなったロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布・ジョンソン分布・一般化ロジスティック分布の超過回数 7 回と同じであること、及び正規分布の超過回数 10 回より少ないことから、“4STEP-procedure”による確率分布の選択は有効であると判断した。

表 5-6 バックテストの結果（参考）¹⁰

[保有期間 5 日：2008 年 9 月 2 日～2008 年 12 月 1 日]

分布	超過回数
正規分布	8
ロジスティック分布	7
双曲線正割分布	6
ラプラス分布	6
ジョンソン分布	8
一般化ロジスティック分布	8
Selection	7
(参考)	
ヒストリカル法	8

(出所) 筆者作成

表 5-6 のとおり参考として保有期間 5 日でも単純なバックテストを実施した結果¹¹、セレクションでは超過回数 7 回となり、最も少ない双曲線正割分布とラプラス分布の超過回数 6 回には及ばずともほぼ同程度の超過回数となり、正規分布の超過回数 8 回より下回る結果となった。

本研究ではバックテストを第 2 章，第 4 章，そしてこの第 5 章で 3 回実施してきた。この 3 回のバックテストを通じてすべてにおいて端的に理解できたことは、「正規分布を仮定して Value-at-Risk 推定をすることはバックテストの観点からは適切でない」ということである。正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定を基準として超過回数を比較すれば、いずれの非正規分布を仮定したとしても、正規分布よりは適切であるという結果となることが多く、バックテストの観点からは非正規分布の優位性を確認することができる。

5.4.4 累積分布関数と Probability Difference

5.3.3 保有期間 5 日の分布選択では、結果として表 5-2 4STEP-Procedure（保有期間：5 日）を示した。ここでは確率密度関数・累積分布関数・Probability Difference の 3 つの図を示し、収益率分布の左裾の状況を確認する。具体的には観測分布（ヒストグラム）と予測分布（累積分布関数）の 99%分位点における値を比較している。抽出したのは 2008 年 9 月 10 日・2008 年 10 月 14 日・2008 年 11 月 19 日として、保有期間 5 日の観測分布とした。

累積分布関数の図では、縦軸が 0.008^{12} となる平行な横線の左端に観測分布の実現値が存在することになる。その実現値と予測値の累積分布関数との差を示したものが Probability Difference の図となる。Probability Difference の詳細については、第 4 章 Appendix G 累積分布関数と Probability Difference について 示している。

$$\text{Probability Difference} = F_n(x) - \tilde{F}(x) \quad (5.3)$$

$F_n(x)$: 観測データの分布の累積分布関数

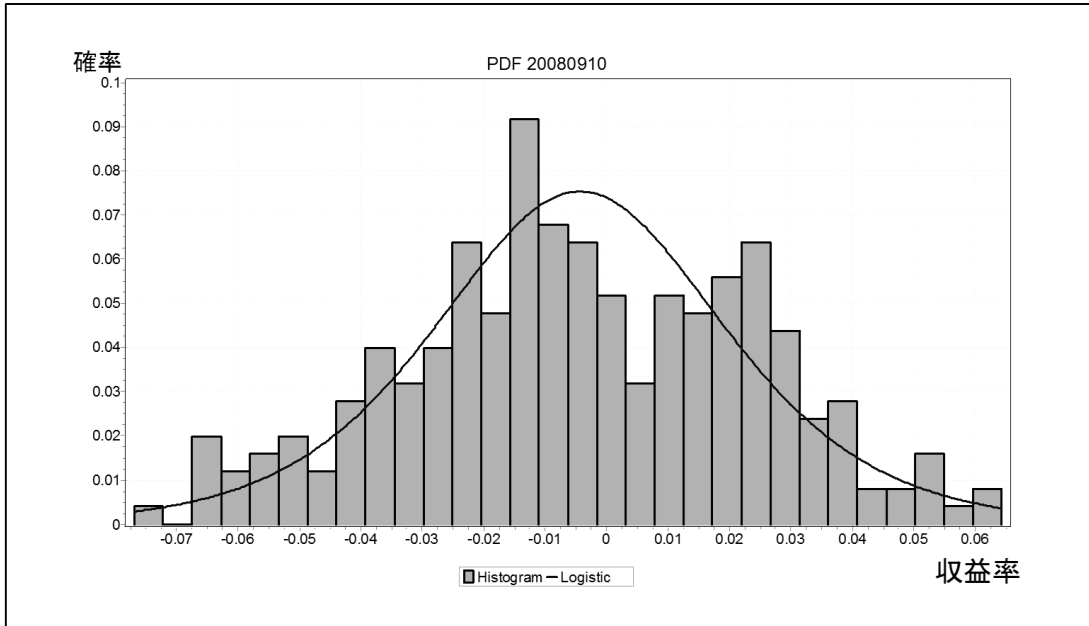
$\tilde{F}(x)$: 仮説の分布の累積分布関数

Probability Difference の図では、縦軸において累積分布との差を把握でき、かつ横軸で分布の散らばりを捉えることができる。確率密度関数・累積分布関数・Q-Q プロットの図とともに比較・分析することで左裾の状況を視覚的に確認することができる。

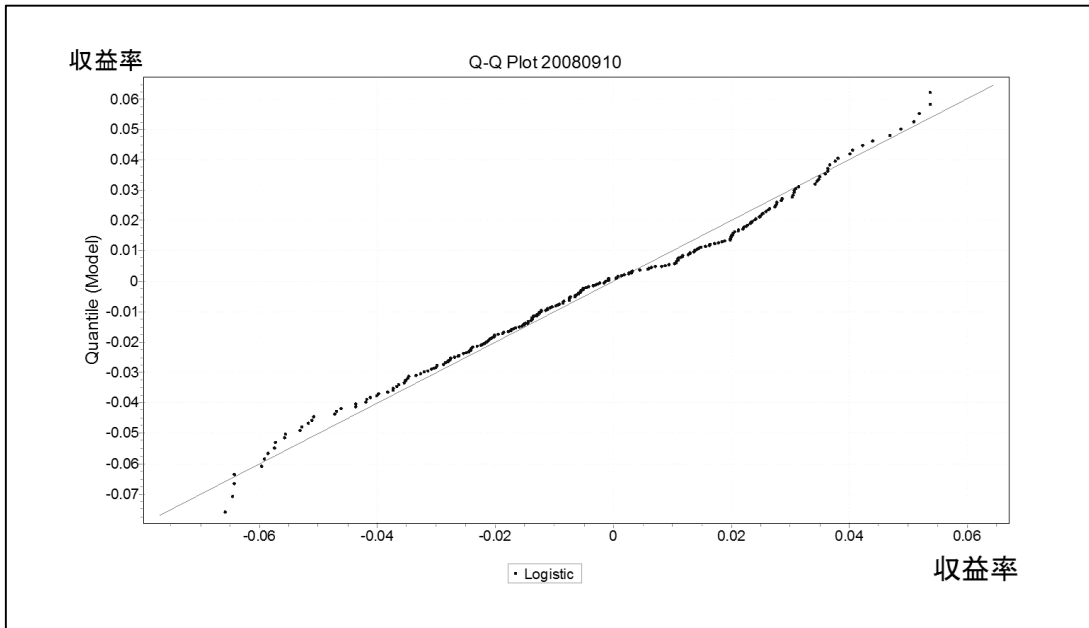
図 5-13～5-15 に、それぞれ、確率密度関数と Q-Q プロット、累積分布関数（拡大）と Probability Difference（拡大）を示した。確率密度関数と Q-Q プロットは全体を表示し横軸（収益率）の目盛は揃っている。また、累積分布関数と Probability Difference は拡大して横軸（収益率）目盛の上限を 0 にして揃えている。

図 5-13 2008 年 9 月 10 日 (ロジスティック分布)

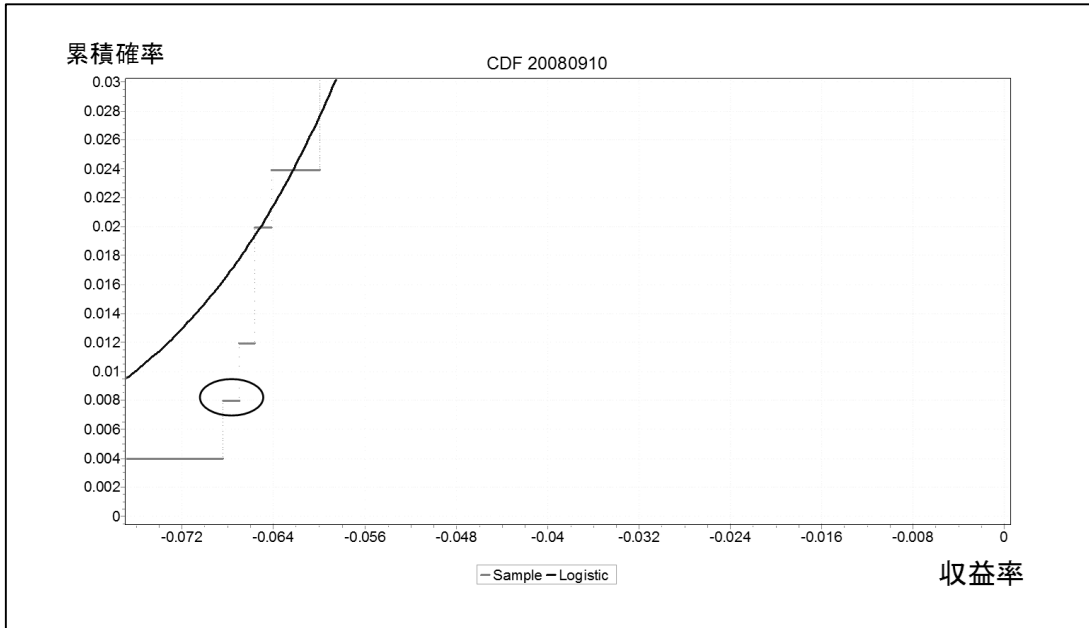
確率密度関数



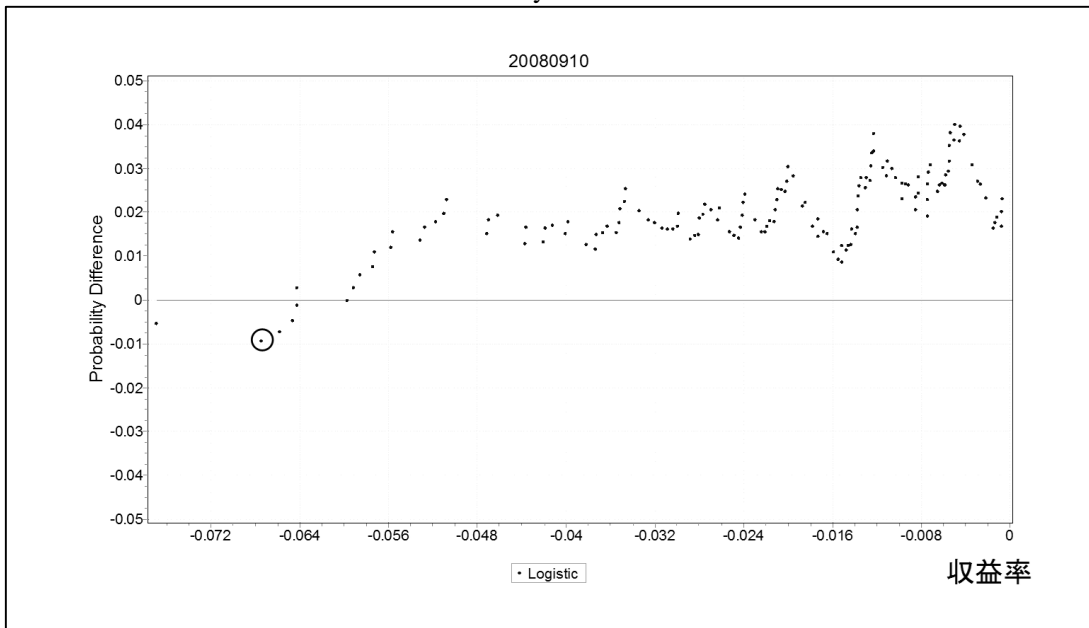
Q-Q プロット



累積分布関数



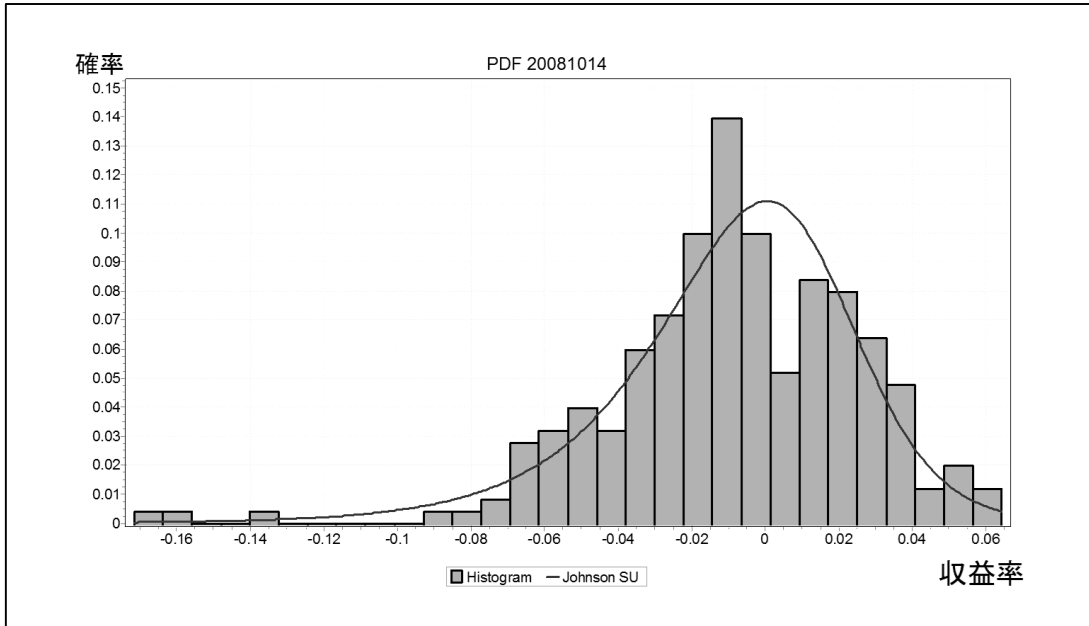
Probability Difference



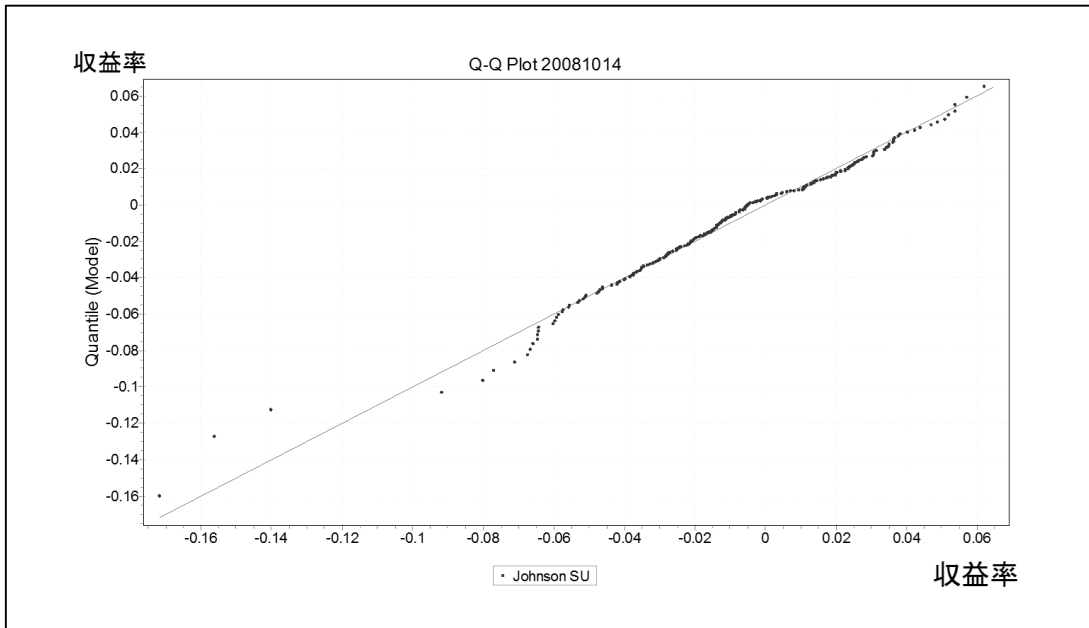
(出所) 観測データをもとに筆者が作成

図 5-14 2008 年 10 月 14 日 (ジョンソン SU 分布)

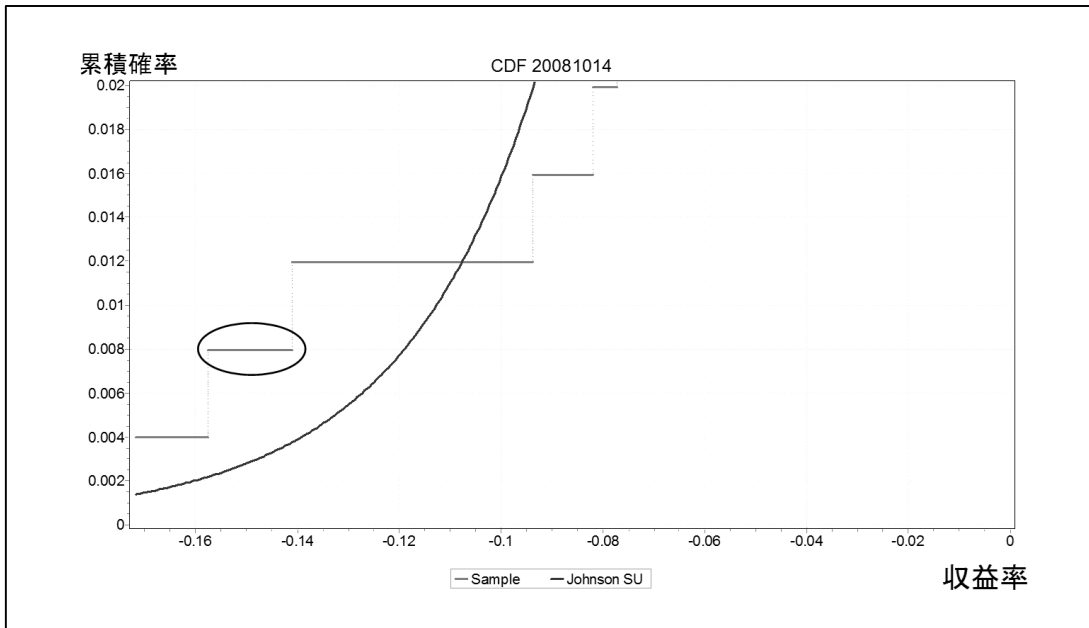
確率密度関数



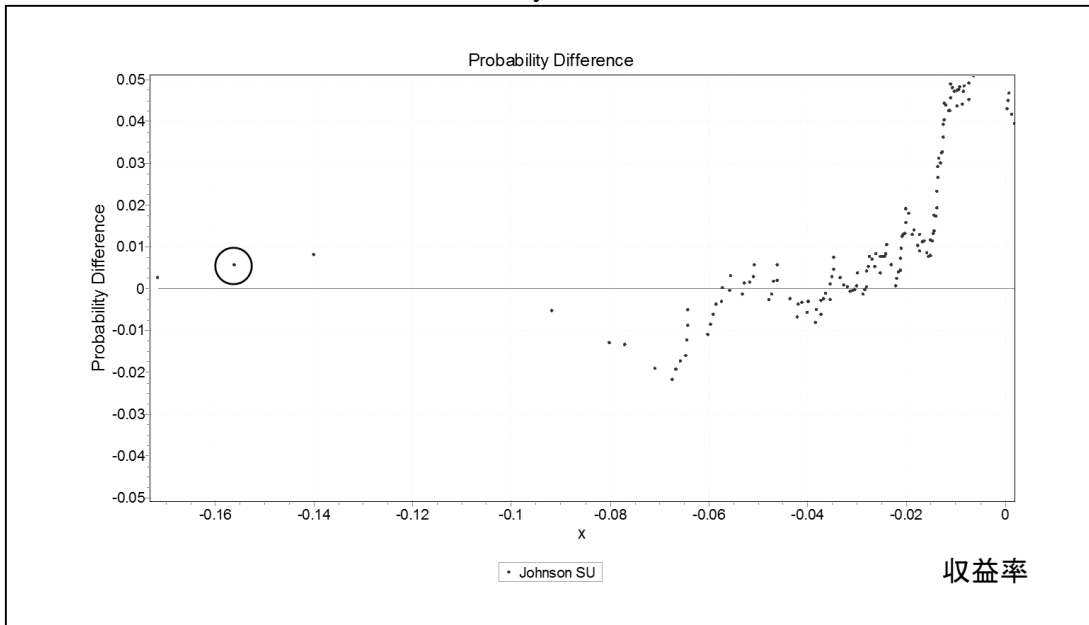
Q-Q プロット



累積分布関数



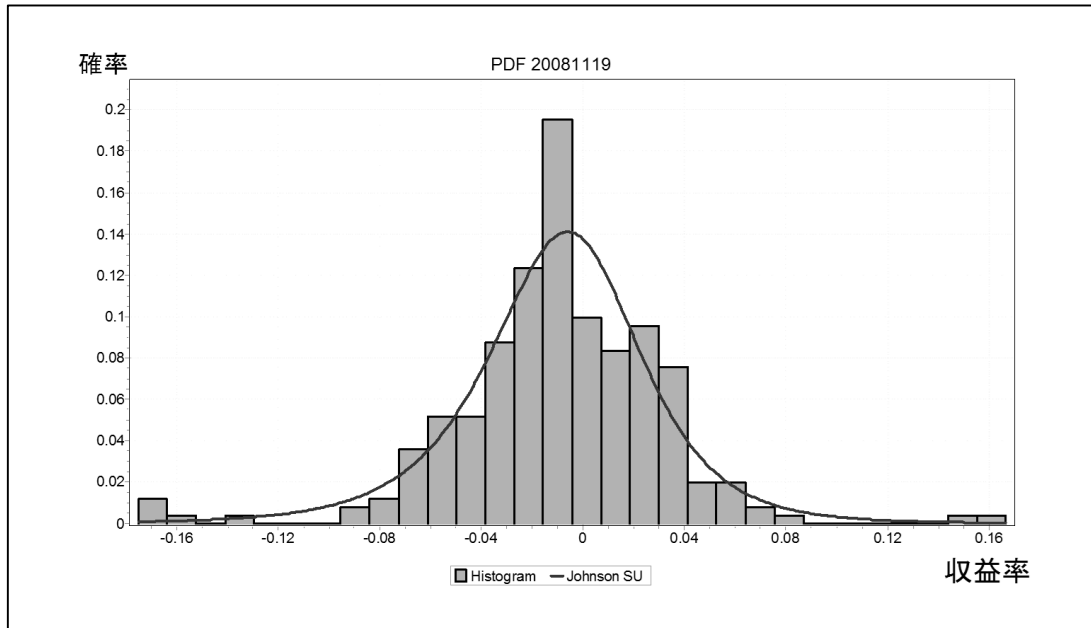
Probability Difference



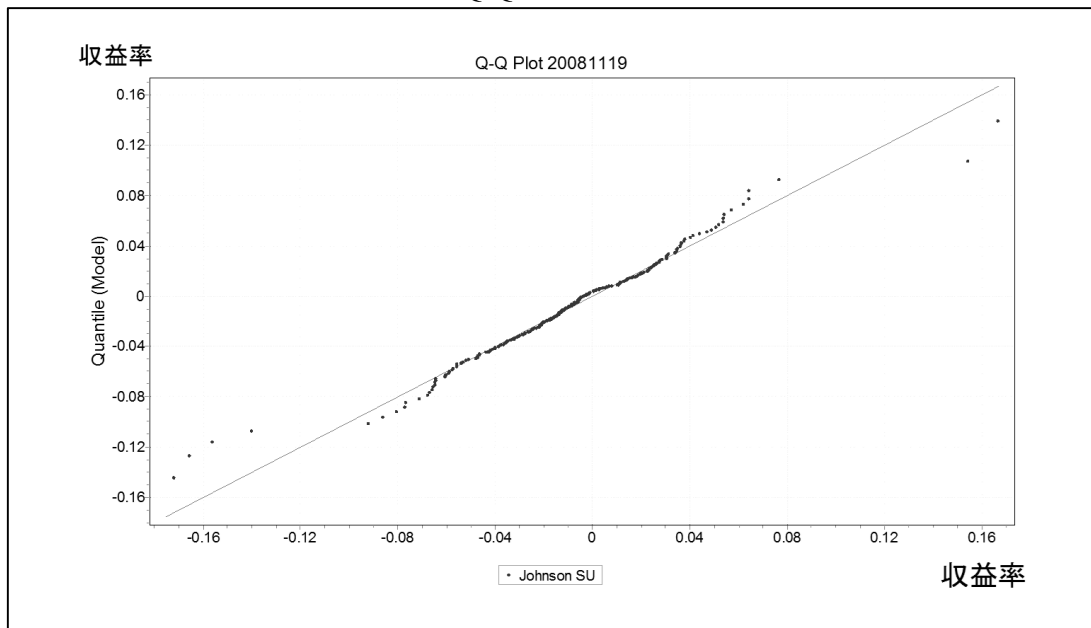
(出所) 観測データをもとに筆者が作成

図 5-15 2008 年 11 月 19 日 (ジョンソン SU 分布)

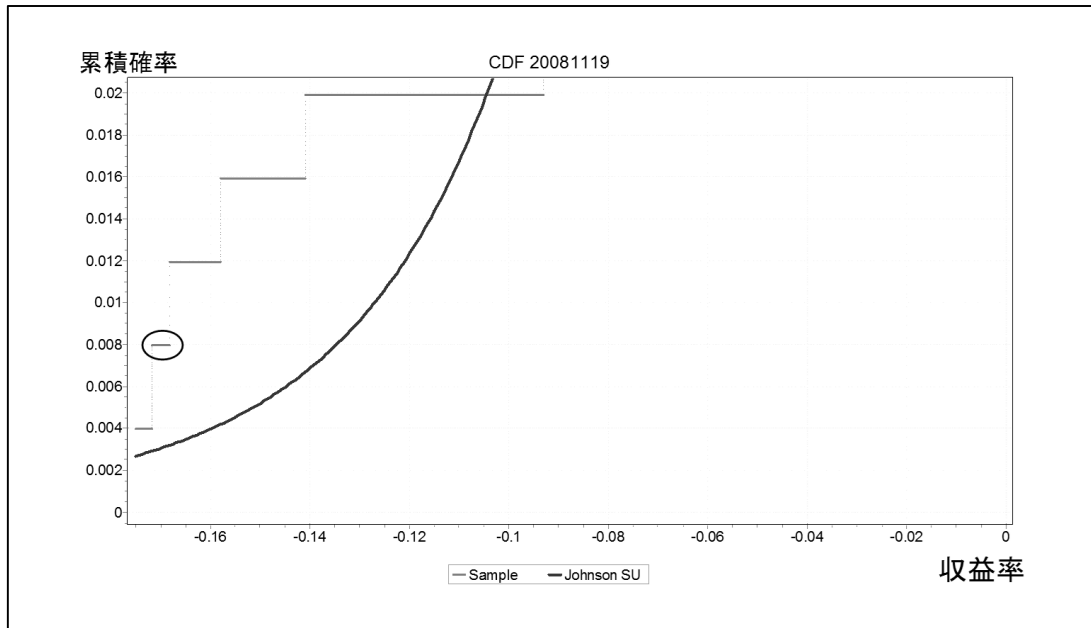
確率密度関数



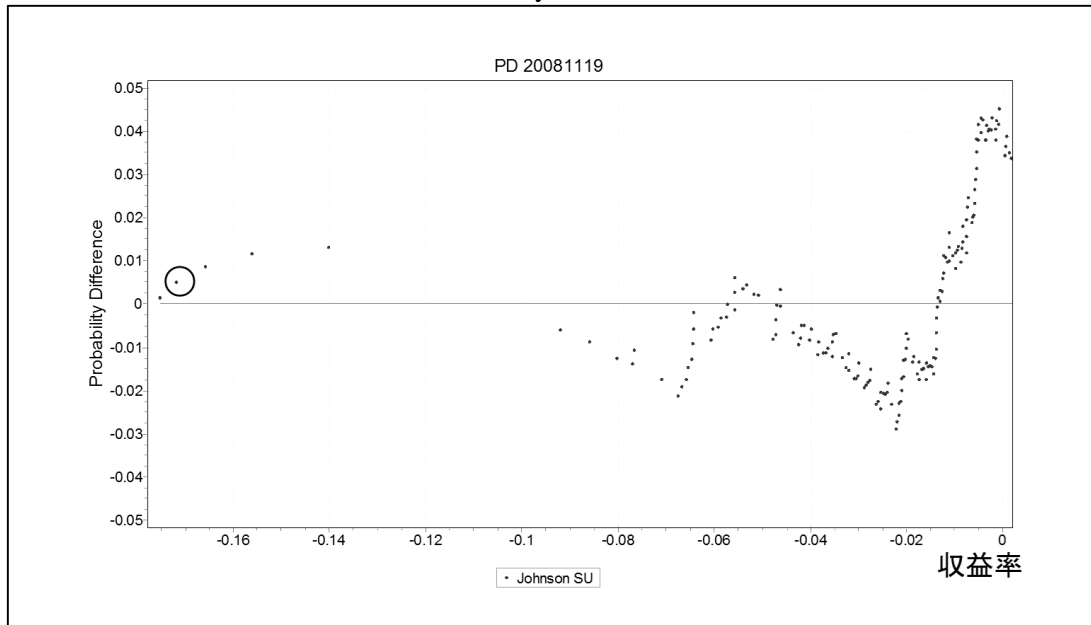
Q-Q プロット



累積分布関数



Probability Difference



(出所) 観測データをもとに筆者が作成

図 5-13~5-15 より視覚的に以下のことがわかる。

図 5-13 2008 年 9 月 10 日では、ロジスティック分布はファットテイル性の問題に抵触しない確率分布であることが累積分布関数の図より確認できる。Probability Difference の図では、観測分布の値が基準となるためロジスティック分布の値はマイナス表示となる。つまり、ファットテイル性の問題に抵触しないときはマイナス表示となり、その乖離幅は小さいことがわかる。

図 5-14 2008 年 10 月 14 日では、確率密度関数の図のとおり、すでにイベントが発生して左裾が長い分布となっている。次に累積分布関数の図を見ても観測分布の 99%分位点を捉えることができず、ファットテイル性の問題に抵触する確率分布であることが確認できる。Probability Difference の図では、図 5-13 とは逆となり、ジョンソン SU 分布の値はプラス表示となっている。つまり、ファットテイル性の問題に抵触するときはプラス表示となり、ここでも乖離幅は小さいことがわかる。

図 5-15 2008 年 11 月 19 日では、確率密度関数の図を見ると、両裾が厚く、かつ、尖りが強い、ファットテイルの典型のような分布形となっていることがわかる。次に累積分布関数の図を見ても観測分布の 99%分位点を捉えることができず、ファットテイル性の問題に抵触する確率分布である。Probability Difference の図では、図 5-14 と同様、ジョンソン SU 分布の値はプラス表示となっておりファットテイル性の問題に抵触するが、乖離幅は小さいことがわかる。

5.5 考察

本章では、現実の損失率の観測分布に適合する確率分布を特定し、かつ、ファットテイル性の問題を考慮した上で仮定する確率分布を決定するプロセスとして“4STEP-procedure”を提案した。本章で設定したポートフォリオのリスクは、株式エクスポージャーと為替エクスポージャーを合算した価格変動リスクであり、しかも保有期間 5 日をとることで分布の形状は左裾が長い、歪んだ分布となっている。株式リスクは保有期間相応の大きな変動を含んだ期間となったが、為替リスクにつ

いては予想に反してあまり変動が大きくない期間¹³となった。さらにポートフォリオの比率は株式エクスポージャー：7に対して為替エクスポージャー：3という比率になっており、株式エクスポージャーの影響が強くなることは否めない。

Value-at-Risk 推定結果については、上記の条件により株式エクスポージャー単独の推定と大きく変わらないものとなっているが、設定したポートフォリオにおける保有期間 5 日固有の特性である、2 段階で上昇という形状を表現できている。これにより“4STEP-procedure”による分布選択はリスク計量において妥当であると判断した。比較対象として取り上げたシンプルなヒストリカル法については、変動する時期にはジャンプとなりやすく、Value-at-Risk 推定値が極端に大きくなる傾向がある。

株式 VaR と為替 VaR の相関の影響分析においては、“4STEP-procedure”により選定された確率分布を仮定する方法では相関によるリスク削減効果があることが示された。また、バックテストの観点からも、正規分布を仮定すると超過回数が多くなり仮定する確率分布として不適切となる。一方、非正規分布を仮定すれば正規分布を仮定した場合より超過回数が減り、“4STEP-procedure”により選定された非正規分布を仮定した方が正規分布を仮定する場合に比べて妥当であることがわかった。さらに、累積分布関数と Probability Difference の分析では、適合度の高い確率分布については、左裾における観測分布との乖離は比較的小さいことが確認できた。

本章では株式エクスポージャーと為替エクスポージャーを合算した価格変動リスクのみを対象とした。通常、バンキング勘定であれば本章では取り上げていない「金利エクスポージャー」¹⁴の比率が高くなる。「ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法」に限ったことではなく、Value-at-Risk 推定全般において、予想分布のもとになる観測分布の形状はエクスポージャーが大きいリスクファクターが採る分布形に依存する傾向がある。

-
- ¹ エクスポージャーは、投資家が持つ金融資産のうち、マーケットの価格変動リスクにさらされている資産の度合いをいう。また、金融機関などで、リスクにさらされている投融資や保証の総額などを指すこともある。ここでは後者の意味で使用する。
- ² 基本分布群は第4章で筆者が定義した分布群である。平均な位置 (location) を中心として左右対称となる確率分布で、正規分布同様、位置と尺度 (scale) の2つのパラメータにより分布の形状が決まる。具体的には、正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布の4分布とする。
- ³ 拡張分布群は第4章で筆者が定義した分布群である。パラメータが3つとなる分布であり、一般化ロジスティック分布、一般化極値分布及びワイブル分布の3分布である。
- ⁴ TTM は、Telegraphic Transfer Middle Rate の略で、日本語では「公表仲値」と呼ばれる。公表仲値 (TTM) は TTS と TTB の中間の相場であり、 $(TTS + TTB) / 2$ で算出される。TTS は Telegraphic Transfer Selling Rate の略で、日本語では「対顧客電信売相場」と呼ばれ、顧客が金融機関で円貨を外国通貨に換える場合に適用されるレートのことをいう。TTB は Telegraphic Transfer Buying Rate の略で、日本語では「対顧客電信買相場」と呼ばれ、顧客が金融機関で外国通貨を円貨に換える場合に適用されるレートのことをいう。
- ⁵ 為替エクスポージャーの比率を低く見積もっている理由は、為替においては為替予約や通貨スワップ等によりヘッジすることが多く、エクスポージャーが小さくなるものと推測したためである。たとえ買い/売りいずれかのポジションを持ったとしても、株式エクスポージャーに比べればかなり小さくなることが見込まれる。とはいえ、為替エクスポージャーが余りにも小さすぎると相関の影響度が全く見えてこないため、30%という比率を採用した。
- ⁶ 第4章4.2 Value-at-Risk 推定の前提 において計算例を記載している。
- ⁷ “3STEP-procedure” では STEP3 に優先度判定と連続性判定という両方のプロセスが含まれていたが、“4STEP-procedure” では優先度判定は STEP3、連続性判定は STEP4 と分断した。明確に分けることで恣意性を排除することができる。特に優

先度判定は事前に決定することが重要であり，途中で変更することを認めない．一方，連続性判定は通常発生する可能性は低い，万が一，発生した時の調整項目としている．

⁸ 一般化ロジスティック分布では，位置 (location) と尺度 (scale) の他に，形状 (shape) が 3 つ目のパラメータとなり，ワイブル分布 (3 パラメータ) では，形状 (shape) と尺度 (scale) の他に，位置 (location) が 3 つ目のパラメータとなる．第 4 章で採用した一般化極値分布については当てはまりが良くないため，本章では採用していない．

⁹ 第 3 章 Appendix D を参照．

¹⁰ 本章で扱う観測期間の観測データには多くの極端に大きな変動 (リーマン・ショックの影響) が含まれるため，Value-at-Risk 推定値を超過する回数は多くなる．

¹¹ バーゼル銀行監督委員会が規定しているバックテストでは保有期間 1 日となっているが，本章で実施したバックテストは単純に予測値と実績値を比較することが目的のため，保有期間 5 日についてもバックテストを実施している．保有期間 5 日のバックテストでは，バーゼル銀行監督委員会が規定しているバックテストで要求されるデータの独立性を確保できないと判断し，保有期間 1 日のバックテストと区別するために参考とした．

¹² 本章の場合，観測分布は 251 個のデータからなり，観測分布の 99% 分位点は小さい方から 2 番目の値となる．

¹³ 本章で扱う観測期間に渡り，尖度は 3 より小さく，丸く鈍い形状となっている．

¹⁴ 実務的にはリスクファクターが価格の場合，リスクファクター変動を変動率としているが，金利の場合はリスクファクター変動を変動幅としていることが多い．本研究では株式と為替の合算であり，価格の対数変動率という同一のリスクファクター変動により損失率・収益率を算出している．

第6章 結論

6.1 各章のまとめ

本研究では、損失率分布に複数の非正規分布を仮定する、静的分布モデルとなる Value-at-Risk 推定の新たな手法を提案する。主にリーマン・ショックの影響が反映されている時期を評価期間として、複数の非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定値を計測し、それぞれの結果との比較分析を実施している。

まず第2章～第3章では実際に非正規分布がどの程度適用できるのか、現実の収益率・損失率の観測分布に当てはまる確率分布をどのような方法で探すのか、という課題に取り組んだ。

第2章では、正規分布を基準として任意の非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定結果を比較・分析している。特に非正規分布の1つであるジョンソン SU 分布に着目してその適用可能性を考察した。結果としてジョンソン SU 分布は、確率分布の形状が対称分布に近いほど歪度の影響を強く受けることがあること、あるいは制約条件により分位点が計測できない場合¹がある等の問題が生じるため、直接的な Value-at-Risk 推定の方法に加え、間接的な分析の手段として役立てることとした。さらに、正規分布とパラメータが同じとなる非正規分布間の関係性を考察すると、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布は比例関係にあることが示されている。この関係性を応用して、仮定する確率分布を随時変更することによりリスクレベルを上下にシフトさせるという概念を提案した。

第3章では、日々変動する現実の損失率の観測分布の正規性を検定した上で、現実の観測分布に、より適合する非正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定結果を分析した。次に、ファットテイル判定により仮定した確率分布が収益率の観測分布の左裾を捉えているか否かを判定した。結果として、正規性が認められる期間と正規性

が認められない期間があることが示され、さらに、現実の観測分布との当てはまりの程度を評価することで適用可能な確率分布が識別できることを確認している。ここでは3つのリスクフェーズ区分を設定すること及びそのリスクフェーズ区分に適合した確率分布を選択するという概念を提案した。

第4章～第5章では、第2章における「リスクレベルを上下にシフトさせる」という概念や第3章における「リスクフェーズ区分に連動させる」という概念からさらに一步踏み込んで、日々変動する現実の損失率分布に適合する確率分布を選定する方法を提案した。手法としては、経験損失分布に1変量パラメトリック分布を当てはめる方法を採用し、適合度の高い適用分布の判定手順をそれぞれの章で提案している。この適用分布の判定手順については恣意性を排除することを目的とし、Value-at-Risk 推定の手法に加えて事前に決められた判定手順をセットとすることにより、1つの Value-at-Risk 推定モデルとしている。具体的には、第4章では前提となる保有期間を変更して Value-at-Risk 推定値を評価し、第5章ではリスクファクターを追加してポートフォリオの Value-at-Risk 推定値を評価した。

第4章では、適用する確率分布の判定手順として“3STEP-procedure”を提案し、保有期間を1日のほか、保有期間10日と20日を追加して評価・分析している。それぞれの保有期間における観測データにより Value-at-Risk 値を推定し、“3STEP-procedure”による判定結果を評価した。

第5章では、単一のリスクファクターから拡張し、2つのリスクファクターを含むポートフォリオの価格変動リスクを捉えるため、株式と為替を合算したポートフォリオを設定し Value-at-Risk 推定値を評価・分析した。事前に決められた判定手順として、第4章で提案した“3STEP-procedure”を拡充した“4STEP-procedure”を提案した。さらに、バックテストによる Value-at-Risk 推定の検証を始め、パラメータ相互の相関の影響や現実の損失率の観測分布の分位点からの乖離の程度を分析して、“4STEP-procedure”による分布選択の適用可能性を考察している。

6.2 経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法のメリット

ヒストリカル法で用いられる経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法は、観測データ数が少ないときに有効な手法として取り上げられていた方法²である。しかしながら、仮定する確率分布を日々変更する場合にも適用することができ、シンプルなヒストリカル法においては経験分布そのものを仮定する確率分布としているのに対して、この方法ではパラメトリックな分布を当てはめるところが異なるものである。つまり、シンプルなヒストリカル法と同じようにわかりやすいというメリットがある。

次に、損益ベースで仮定する確率分布を選定するため、適合度の高い確率分布が存在すれば Value-at-Risk 推定の精度も高くなり、逆に適合度の低い確率分布しか存在しなければ Value-at-Risk 推定の精度は低くならざるをえない。つまり観測分布に入るデータ数がこの提案する方法の精度に影響を及ぼす可能性が高くなる。また、シンプルなヒストリカル法が損益ベースで観測分布を適用するのと同じように、経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法でも損益ベースで確率分布を選定するため、非線形リスクにも対応することができる。さらに、モンテカルロ・シミュレーションを適用する場合にも、スムーズに移行できることが期待できる。

そして何よりも歪んだ分布を適用できることが大きなメリットとなっている。伝統的な分散共分散法では事前に選定した単一の確率分布（正規分布）を一律に日々仮定する方法が採られているわけであるが、常に仮定した確率分布（正規分布）が現実の観測分布に適合していることはない。一方、本研究で提言する方法では日々変化する観測分布に適合する確率分布を選択した上で、Value-at-Risk 推定を実施する。これにより、従来の方法より計算結果の精緻性は高められ、納得感も高められる。特にリスクファクター変動が大きくなっていくときには観測分布の形状が歪んだ分布となるため、3 パラメータ以上の非正規分布を仮定することは有効となる。

ここで本研究において提言する方法とヒストリカル・シミュレーションとの違いを述べておく。まず、ヒストリカル・シミュレーションでは計測基準日時点の損益計算を基準として、リスクファクターの過去データを使ってシミュレーションが実施される。そのシミュレーション後のヒストグラムに基づいて順序統計の概念に従って分位点を決定する。一方、提言する方法では、計測基準日を含むヒストリカル損益の観測分布を基準として、その観測分布に適合した分布を仮定して数値解析的に分位点を決定する。言い換えると、シミュレーションの基準となるベースが、ヒストリカル・シミュレーションでは過去のリスクファクターとなり、提言する方法ではヒストリカル損益となる。いずれの方法においても、より良いシミュレーションをすることが目的であり、目指すところに大きな違いはない。その意味では、提言する手法もヒストリカル・シミュレーションの1つであると考えられよう。

最後に、損益ベースで1変量パラメトリック分布を仮定する計算処理であるため、計算負荷はさほど大きくはならないというメリットもある。計算負荷が大きくなれば、その分、様々なベースにおける評価・分析が可能となろう。

6.3 4STEP-procedure のメリット

まず、STEP1 適合度判定は仮定する確率分布が現実の観測分布にどの程度、適合しているかを判断しているプロセスであり、第4章から採用しているアンダーソン・ダーリング検定が有効に機能している。STEP2 ファットテイル判定はファットテイル性の問題の有無を判定しているプロセスとなる。このSTEP1 とSTEP2 については、本研究の中で最も重要な位置を占めている。特に5.4.4 累積分布関数とProbability Difference で分析しているように、適合度の高い確率分布は左裾での観測分布における99%分位点との乖離は比較的小さいことがわかっている。

次に、STEP3 優先度判定では上記のSTEP1 とSTEP2 のうち、いずれを優先するかを事前に決定しておくこととしている。STEP1 適合度判定を優先すれば、確率分布の全体より判断して適合度の高い確率分布を識別することが可能となる。ただし、

注意すべきことは、必ず選定された確率分布をグラフ等で目視しないと 99%分位点の適合状況が外れる場合も考えられることである。結果として、バックテスト等で想定外の思わしくない場合も考えられるため、STEP1 の分布の適合性を優先する場合には、追加的な検証が必要になることも考慮しておくべきであろう。

一方、STEP2 のファットテイル性を優先する場合、本研究がこのケースであるが、「特に低位安定期においてはファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布があれば、その分布を選択するという条件を付ける」としている。ここではリスクフェーズ区分における「平常時」を想定しており、少なくとも平常時ではファットテイル性の問題に抵触しない分布を適用することが望ましいと考えられる。裏返せば、正規分布が選定されるケースや、正規分布を仮定した Value-at-Risk 推定値よりも小さい値となる確率分布が選定されるケースも考えられる。そのときには何らかの条件³を設定する等の対処が必要となる。

問題となるのは平常時以外の時期であり、このときはファットテイル性の問題に抵触しない確率分布が事前に選定した分布の中には存在しないという場合が考えられ、十分な検討が余儀なくされる。したがって、少なくとも平常時では保守的に捉えてファットテイル性の問題に抵触しない非正規分布を適用することが必要となる⁴。

最後に、STEP4 連続性判定では候補となる確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定を計測した上で、Value-at-Risk 推定の変動の方向性や推移の連続性を確認することを要請している。ここで危惧されるのは、仮定する確率分布を適用することが原因で、リスク量が予想外の値になってしまうことである。たとえば、他の確率分布では明らかに前日比で減少傾向を示しているにもかかわらず、たまたま仮定する確率分布が前日に採用された確率分布と異なることが原因となり、リスク量が増加してしまうこと、あるいは、他の確率分布では前日比で増加傾向を示しているにもかかわらず、リスク量が減少してしまうという事象がまれに発生することに対処するためである。Value-at-Risk 推定値が大きく変動した場合、リスク管理部署では当然その原因分析が行われる。その結果、「Value-at-Risk 推定の変動原因は確率分布が変更されたこと」という経営への回答は好ましくない。これを未然に防ぐ手段として

の調整を行うものとしている。この点は運用面の課題とすることも可能であるが、本研究が事前に“4STEP-procedure”という手順を決めておくというモデルであることより、併せて適正なリスク量を計測するという目的から判断して、STEP4として一連のプロセスに入れ込んだものである。

第5章で提言した“4STEP-procedure”ではSTEP3とSTEP4を明確に分断しているが、第4章で提言した“3STEP-procedure”では分断せずにSTEP3に両方を含めたものとなっている。基本的に実際のプロセス自体は同じものであり、“4STEP-procedure”は“3STEP-procedure”の改良版であることを述べておく。

提案した方法に則って1変量パラメトリック分布を当てはめる方法を適用し、“4STEP-procedure”（“3STEP-procedure”）に基づいて推定したValue-at-Riskの結果は、正規分布を仮定した推定結果よりは大きく、シンプルなヒストリカル法による推定結果よりは小さくなり⁵、両者の中間を推移する手法として新たな選択肢の拡大という役割を果たせるものと期待される。

6.4 応用範囲の拡大

本研究は、銀行におけるバンキング勘定のリスク計測を主体として、特に分散共分散法を採用している銀行向けに、新しいValue-at-Risk推定手法を提言することを目指しているものである。とはいえ、バンキング勘定のリスク計測はもちろんのこと、他の場面でも有効活用できることを期待される。たとえば、単一のリスクファクターのリスク量計測、様々なリスク計測のベンチマーク、が挙げられる。

単一のリスクファクターのリスク量計測において、本研究では第2～5章でTOPIXを扱い、第5章では円/ドル為替レートもリスクファクターとして採用している。観測期間は第3～5章では251日と比較的短期間を設定しているが、特に保有期間1日の場合、適合分布の当てはまりの程度は非常に良好であることがわかっている。

図6-1～6.5及び図6-6～6-10に2008年9月12日におけるTOPIXの日次変化率と円/ドルレート（FOREX）の日次変化率の図を示す。順に、収益率の確率密度関数

(非正規分布), Q-Qプロット, 収益率の累積分布関数(拡大図), 現実の観測分布の累積分布関数と予測値の累積分布関数の差を示す Probability Difference(拡大図), P-Pプロットとなっている。確率密度関数と Q-Qプロットでは全体を示し横軸の目盛は揃っている。一方, 累積分布関数と Probability Difference は拡大して横軸の目盛を揃えている。P-Pプロットだけは横軸の目盛が他の図とは異なっており, 縦軸・横軸ともに累積確率となり 0 から 1 までが範囲となる。

まず, TOPIX の日次変化率を確認する。図 6-1 TOPIX の確率密度関数では観測分布のヒストグラムと, 最も適合しているジョンソン SU 分布⁶の確率密度関数を表示しており, AD 統計量は 0.31679 となっている。次に, 図 6-2 TOPIX の Q-Qプロットでは横軸と縦軸がともに収益率となっており, 収益率(横軸)の散らばりの程度を表している。小さい値から 2 番目の点はほぼ 45 度線上に乗っており, 当てはまりが良いことを示している。

図 6-3 TOPIX の累積分布関数(拡大図)では縦軸(累積確率) 0.01 が階段状の観測分布と交差する点(-0.043, 0.01)に予測累積分布関数がほぼ一致するような形で近接している。さらに図 6-4 TOPIX の Probability Difference においても観測分布の累積分布関数と予測値の累積分布関数の差は横軸-0.044(丸印: 小さい値から 2 番目)となっており, 実現値の分位点と予測値の分位点の乖離は微小となっている。最後に, 図 6-5 TOPIX の P-Pプロットでは最も適合している分布を選択しているため, 左裾近辺の当てはまりは良い状況となっていることが確認できる。

次に, FOREX の日次変化率を確認する。図 6-6 FOREX の確率密度関数では観測分布のヒストグラムと, 最も適合している一般化ロジスティック分布を表示しており, AD 統計量は 0.28553 となっている。次に, 図 6-7 FOREX の Q-Qプロットでは小さい値から 2 番目の点は 45 度線からは少し乖離しており, 当てはまりはあまり良くないことがわかる。

図 6-8 FOREX の累積分布関数(拡大図)では縦軸(累積確率) 0.01 が階段状の観測分布と交差する点(-0.0233, 0.01)より右側に予測累積分布関数が位置しており, 若干ファットテイルとなっている。さらに図 6-9 FOREX の Probability Difference においては観測分布の累積分布関数と予測値の累積分布関数の差は横軸-0.0356(丸

印：小さい値から 2 番目) で見られるが乖離は小さくなっている。最後に、図 6-10 FOREX の P-P プロットでは最も適合している分布を選択しているため、左裾近辺の当てはまりは良い状況となっていることが確認できる。

以上のように、図による視覚的な確認ではあるが、株式・為替共に保有期間 1 日の場合、適合度の高い確率分布の当てはまりの程度は非常に良好であることがわかる。本章で示した 5 つの図、収益率の確率密度関数、Q-Q プロット、収益率の累積分布関数、Probability Difference、P-P プロットを確認することで正規性の状況はもとより、ファットテイル性の問題があるケースでもファットテイルの程度を的確に確認することができる。

図 6-1 TOPIX の確率密度関数

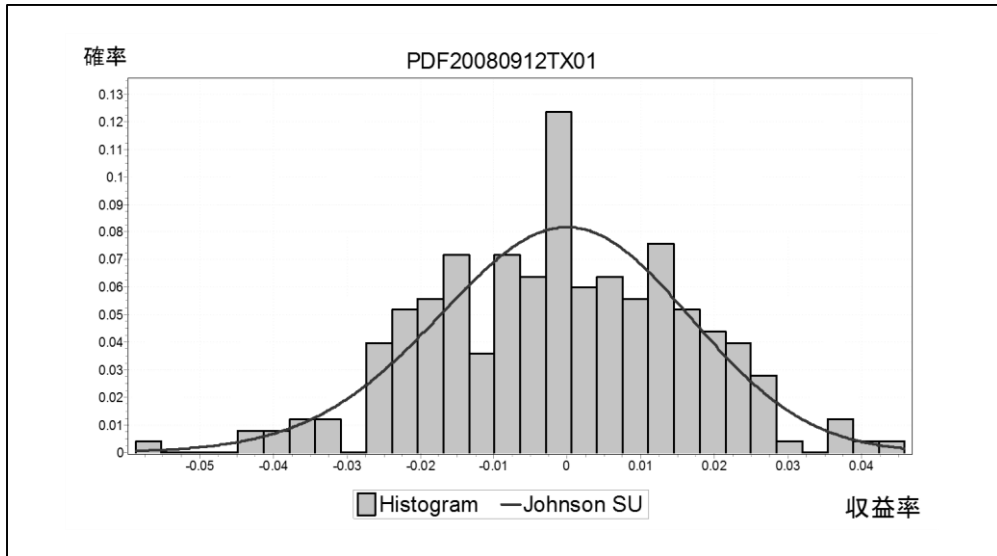


図 6-2 TOPIX の Q-Q プロット

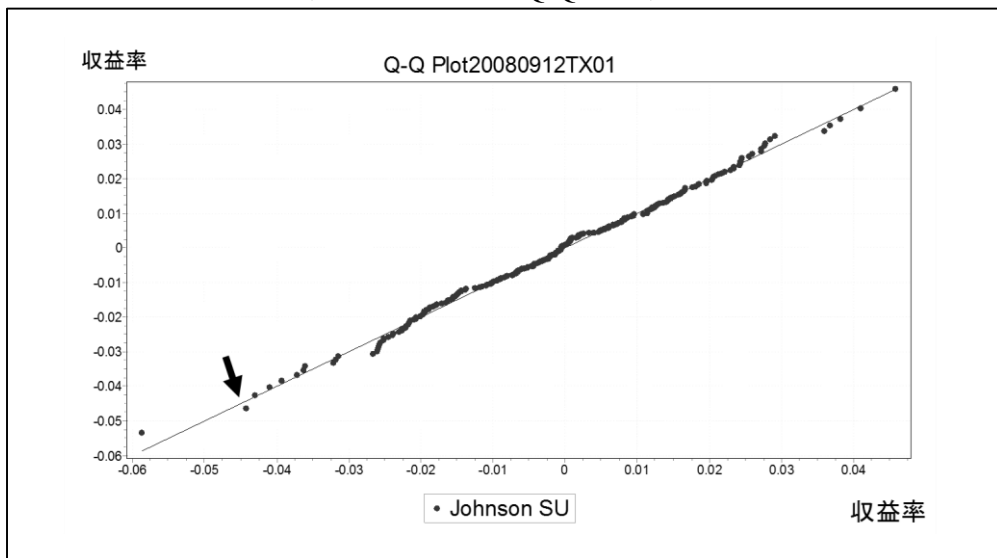


図 6-3 TOPIX の累積分布関数 (拡大図)

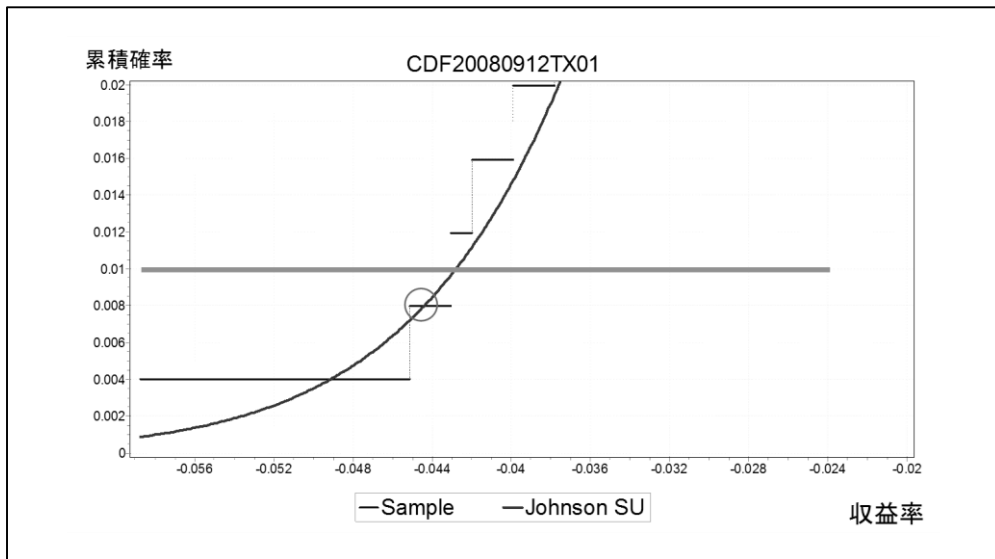


図 6-4 TOPIX の Probability Difference (拡大図)

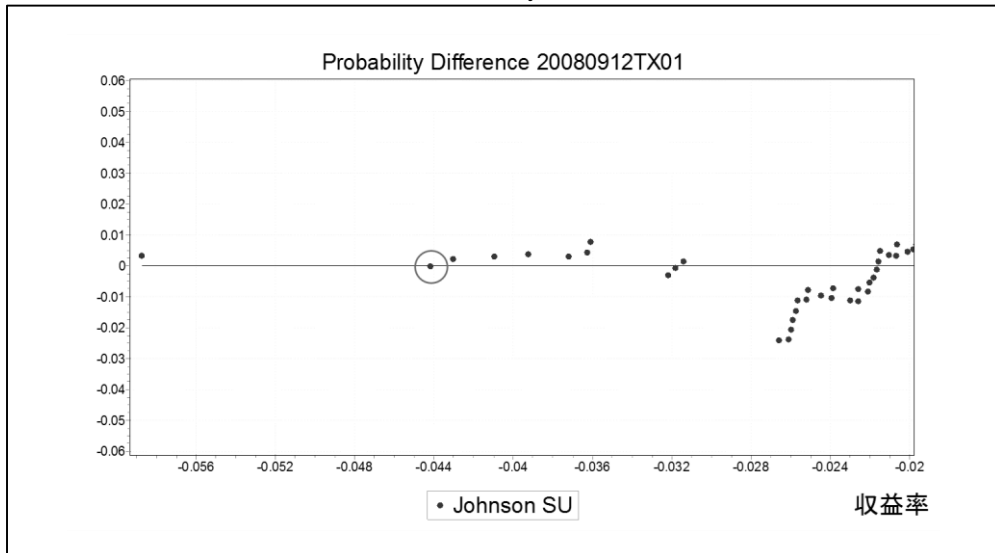


図 6-5 TOPIX の P-P プロット

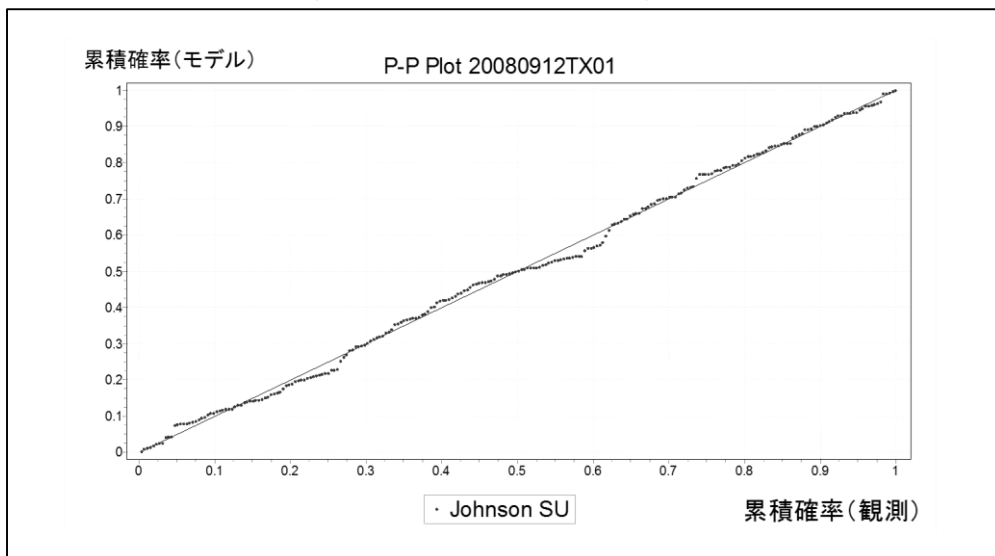


図 6-6 FOREX の確率密度関数

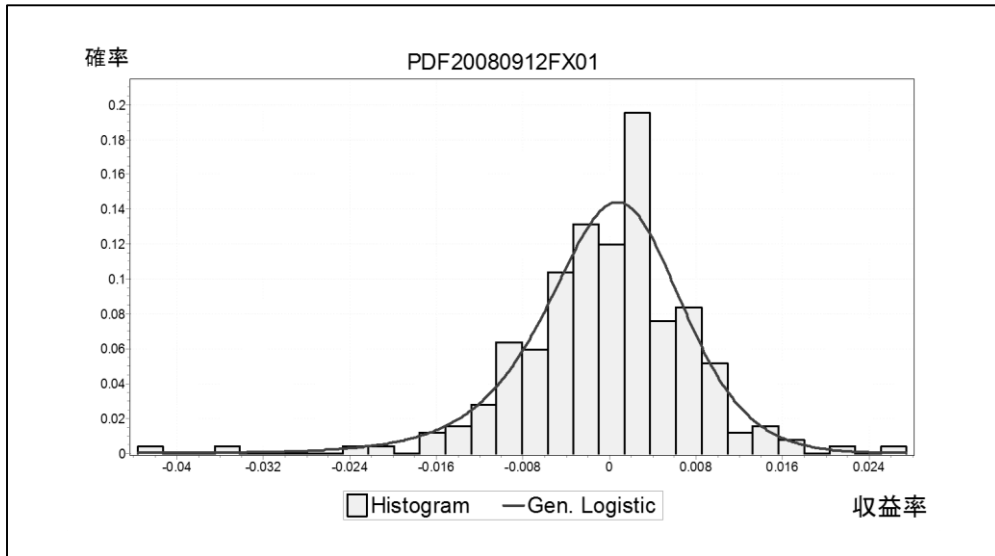


図 6-7 FOREX の Q-Q プロット

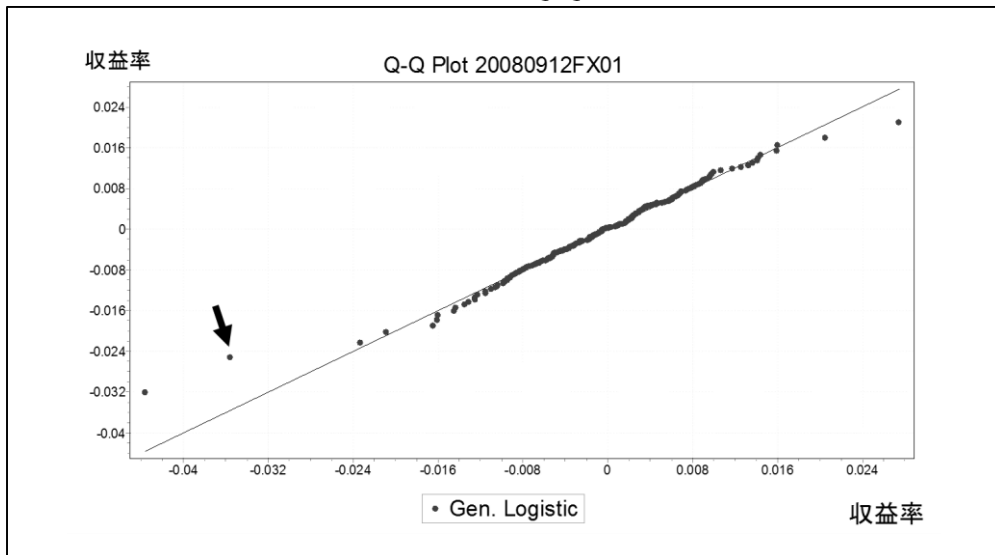


図 6-8 FOREX の累積分布関数 (拡大図)

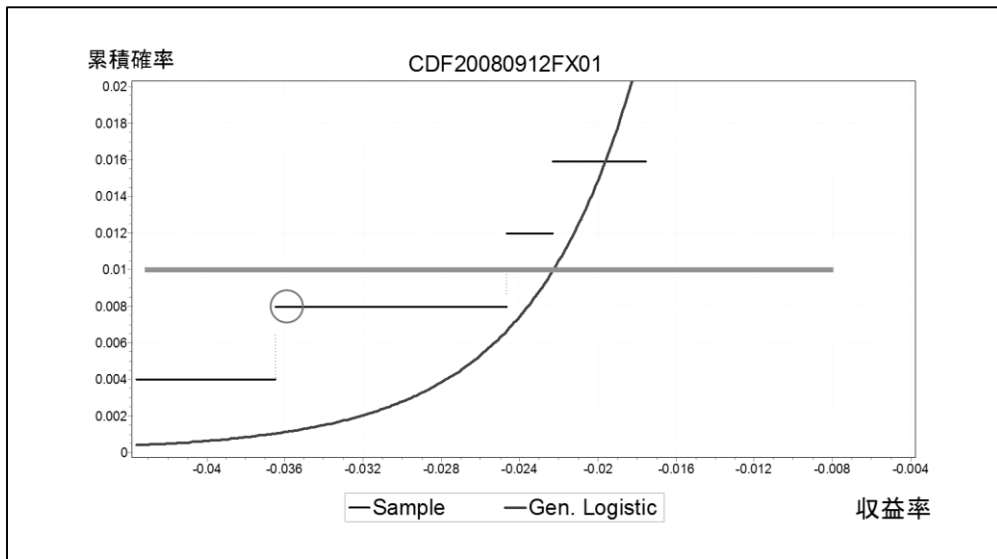


図 6-9 FOREX の Probability Difference

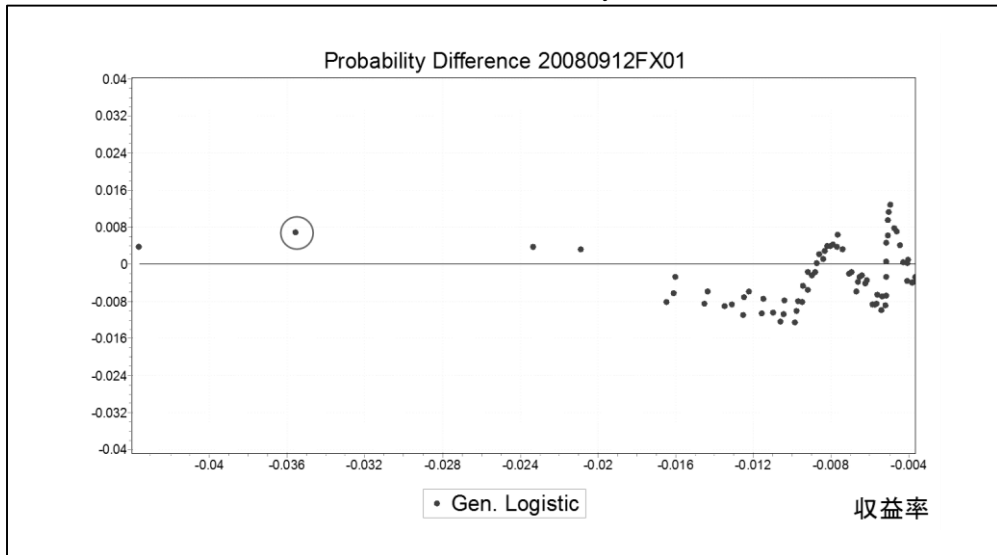
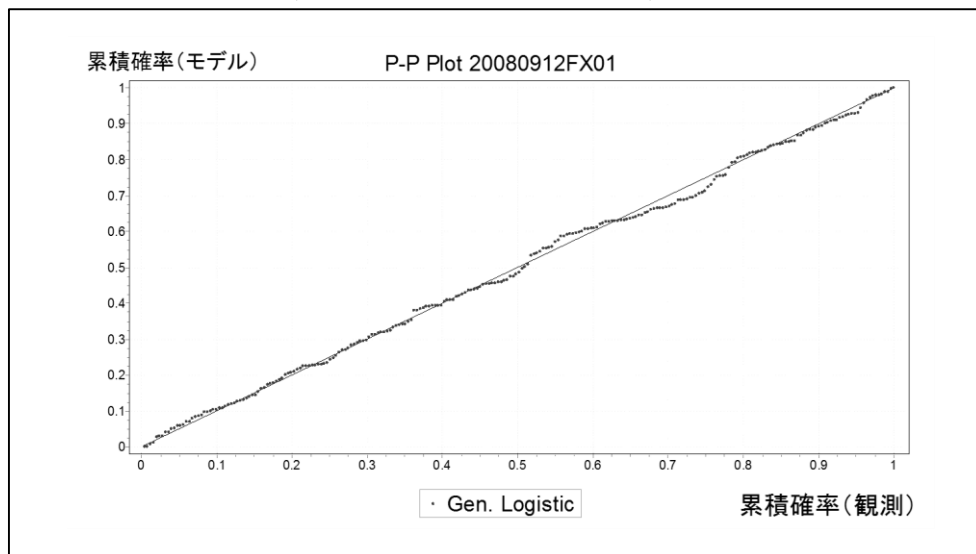


図 6-10 FOREX の P-P プロット



次にリスク計測のベンチマークとして利用できるかという点であるが、6.3 4STEP-procedure のメリット の最後に述べているが、提言した方法による推定結果は、「正規分布を仮定した推定結果よりは大きく、シンプルなヒストリカル法による推定結果よりは小さくなる」という結果となっている。つまり、リスクレベルが上昇していく過程で分散共分散法では上昇の程度があまり大きくならない傾向があり、ヒストリカル法は上昇の程度がとて大きくなる傾向がある。たとえば、第 5 章 図 5-1 Value-at-Risk 推定（保有期間：1 日）と図 5-2 Value-at-Risk 推定（保有期間：5 日）において、セレクションの推移とヒストリカル法による推移を示している。保有期間 1 日の場合、提言した方法による推定値はヒストリカル法による推定値寄りになる（ヒストリカル法の推移に近づく）傾向が見える。一方、保有期間 5 日の場合、提言した方法による推定値は Normal-VaR による推定値寄りになる（分散共分散法の推移に近づく）傾向が見える。すなわち、どちらかに偏るわけでもなく両者の中間あたりで推移している状況により、過小評価や過大評価というような極端な推定値とならない可能性が高いことから、ベンチマークとして利用できる可能性は十分にあると判断している。

6.5 結論と課題

本研究の目的は、銀行におけるバンキング勘定のリスク計測を主体として、特に分散共分散法を採用している銀行向けに、新しい Value-at-Risk 推定手法を提言することにある。そこで考察した概念は、日々の現実の損失率の観測分布に近似させることであり、分布の近似を確認する具体的な方法として第 3 章では 1 変量コルモゴロフ-スミルノフ検定、第 4 章以降ではアンダーソン-ダーリング検定を採用した。前者は観測分布から導かれる予測値と仮定する分布から導かれる予測値の乖離が最も大きくなる 1 点のみで適合度を判断する検定であるが、後者では観測分布から導かれる予測値と仮定する分布から導かれる予測値の乖離を分布全体でバランスの良さ⁷を調べる検定である。前者と比較してより有効であると判断し、第 4 章以降では

アンダーソン-ダーリング検定を一貫して使用している。

次に、確率分布に関しても、当初はジョンソン SU 分布の有効性に大きく期待をしていたが、分布特性上の問題により仮定する非正規分布の範囲を拡大する方向を検討している。結果的には双曲線正割分布と一般化ロジスティック分布は非常に当てはまりが良いという発見や、ジョンソン SU 分布を仮定する場合の問題も限定的であり、問題が生じない場合には適合度が高いことがわかり、研究の成果として非常に有意義なものとなった。また前節で示したように、確率密度関数、Q-Q プロット、累積分布関数、Probability Difference、P-P プロットの 5 つの図を視覚的に確認することで、正規性の状況やファットテイル性の状況を的確に把握することが可能となる。

さらに、恣意性の排除という目的で分布選択の手順として“3STEP-procedure”や“4STEP-procedure”を設定している。これらの手順を採用することにより金融機関が Value-at-Risk 推定値を恣意的に操作することをなくし、Value-at-Risk 推定値の客観性を確保することが期待できる。

最後に本研究では、「経験損失分布に 1 変量パラメトリック分布を当てはめる方法」を基礎としてファットテイル性の問題を考慮しながら、適合度の高い分布を選定する方法及びその手順を提言している。結果として、ヒストリカルデータを重視しつつ損益ベースで当てはまりの良い確率分布を仮定して推定できる、わかりやすく、かつ、精緻な静的分布モデルを提案することができた。

この提案した手法をさらに進展させ、各リスクファクターとその同時分布にパラメトリックな確率分布を想定したモンテカルロ・シミュレーションへとステップアップさせていく足がかりとしたい。

-
- ¹ 厳密に言うとパラメータ推定ができない，が正しい．計算過程において制約条件があるため計算できない場合がある．
- ² 第 1 章 注 17 を参照．
- ³ たとえば，4STEP-procedure により選定された分布を仮定した場合の VaR 値が正規分布を仮定した VaR 値よりも小さくなるときには，Normal-VaR 以外の非正規分布を採用する，というように下限の制約を設ける必要がある．
- ⁴ 3.4.2 分布特性に適合したリスクフェーズ区分でも触れているが，保守的な確率分布としてロジスティック分布を想定している．実際に第 4 章の「保有期間 10 日」や第 5 章の「保有期間 5 日」では，低位安定期にファットテイル性の問題に抵触しない分布があれば，抵触しない非正規分布を選択するという条件にフィットする確率分布としてロジスティック分布が採用されている．
- ⁵ この結果はリーマン・ショックという大きなイベントの発生の影響として，非常に大きなマイナス変動が連続して発生した場合に起こるものであり，常にシンプルなヒストリカル法による推定結果より小さくなるとは限らない．
- ⁶ 第 4 章 表 4-4 で実際に選定された確率分布は，ロジスティック分布である．ここでは敢えて，適合度判定において最も適合度の高いジョンソン SU 分布を示しており，保有期間 1 日の場合の良好な当てはまり具合を確認している．
- ⁷ アンダーソン-ダーリング検定は裾でも中央値付近でも等しい感度を与える検定である．

謝 辞

博士論文を作成するにあたり、政策研究科 齊藤壽彦教授、石山嘉英教授、栗林隆教授には、いつも暖かいご指導と有用な示唆を与え続けていただき、心より感謝するとともに御礼申し上げます。本論文の審査過程においてご助言を賜りました、日本銀行金融研究所 吉羽要直企画役にも感謝いたします。また、プロジェクト演習に参加された多くの皆様からの有用なアドバイスと力添えをいただき、博士論文を完成させることができました。重ねて感謝申し上げますとともに、先生方よりいただいた御恩に報いるためにも、これを出発点として更に研究を続けてまいる所存であります。

引用文献

- Alexander, C. [2008] *Market Risk Analysis IV : Value at Risk Models*, John Wiley & Sons.
- Anderson, T. W. and Darling, D. A. [1952] “Asymptotic theory of certain ‘goodness of fit’ criteria based on stochastic processes,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 23 (2), pp. 193–212.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L. [1999] “VaR without Correlations for Portfolios for Portfolios of Derivative Securities,” *Journal of Futures Markets*, 19 (5), pp.583–602.
- Basel Committee on Banking Supervision, [1996] Supervisory framework for the use of “Backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirement, Basel Committee on Banking Supervision.
- Basel Committee on Banking Supervision [2009] Revisions to the Basel II market risk framework, Basel Committee on Banking Supervision.
- Basel Committee on Banking Supervision [2013] Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework, Basel Committee on Banking Supervision.
- Boudoukh, J, Richardson, M. and Whitelaw, R. [1998] “The Best of Both Worlds,” *Risk*, May, pp.64–67.
- Choudhry, M. [2013] *An Introduction to Value-at-Risk* 5th Edition, John Wiley & Sons.
- Choi, P. and Nam, K. [2008] “Asymmetric and leptokurtic distribution for heteroscedastic asset returns: The SU-normal distribution,” *Journal of Empirical Finance*, 15(1), pp.41–63.
- D’Agostino, R. B. [1986] “Tests for the Normal Distribution,” In D’Agostino, R.B. and Stephens, M.A., *Goodness-of-Fit Techniques*, CRC Press, pp.367–419.
- Efron, B. [1979] “Bootstrap methods: Another look at the Jackknife,” *The Annals of Statistics*, 7(1), pp.1–26.
- Hull, J. and White, A. [1998] “Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk,” *Journal of Risk*, 1(Fall), pp.5–19.
- Jarque, C.M. and Bera, A.K. [1987] “A test for normality of observations and regression residuals,” *International Statistical Review*, 55(2), pp.163–172.

- Kupiec, P. [1995] “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,” *The Journal of Derivatives*, 3(2), pp.73–84.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. [2005] *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- Miura, R. and Oue, S. [2000] “Statistical Methodologies for the Market Risk Measurement,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 7(4), pp.305–319.
- Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. [1965] “An analysis of variance test for normality,” *Biometrika*, 52(3/4), pp.591–611.
- Simonato, J.G. [2011] “The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall,” *The Journal of Derivatives*, 19(1), pp.7–24.
- Simonato, J.G. [2012] “GARCH Processes with Skewed and Leptokurtic Innovations: Revisiting the Johnson SU Case,” *Finance Research Letters*, 9(4), pp.213–219.
- Tuenter, H. [2001] “An algorithm to determine the parameters of SU curves in the Johnson system of probability distributions by moment matching,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 70(4), pp.325–347.
- 青沼君明・村内佳子 [2009] 『Excel&VBA で学ぶ VaR』, 金融財政事情研究会.
- 安藤美孝 [2004] 「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測」『金融研究』第 23 巻別冊第 2 号, pp.1–41.
- 磯貝孝 [2014] 「切断安定分布を用いた VaR・ES の計測精度に関する数値的分析」, ジャフイー・ジャーナル『リスクマネジメント』, pp.120–171.
- 久保田幸長 [2009] 「市場 VaR 計測の問題点とパラメトリック法による改善」, 日本銀行金融研究所 IMES Discussion Paper Series, 2009-J-27.
- 小又雄一郎 [2011] 「東日本大震災によるリスクの変化」, 『NFI リサーチ・レビュー』, 2011 年 7 月号, pp.1–20.
- 日本規格協会 [2010] 『リスクマネジメント—原則及び指針』, 日本規格協会.
- 日本銀行金融機構局 [2011] 「国際金融危機の教訓を踏まえたリスク把握のあり方」, *BOJ Reports & Research Papers*, 日本銀行.
- 真壁昭夫・久保田幸長 [2006] 『ファイナンス理論の新展開』, 日本評論社.

- 蓑谷千風彦 [2001] 『金融データの統計分析』，東洋経済新報社.
- 蓑谷千風彦 [2010] 『統計分布ハンドブック 増補版』，朝倉書店.
- 蓑谷千風彦 [2012] 『正規分布ハンドブック』，朝倉書店.
- 山下智志 [2000] 『市場リスクの計量化と VaR』，朝倉書店.
- 吉羽要直 [2014] 「コンピュータの金融実務での活用の展望」，『証券ジャーナリストジャーナル』，52(3)，pp.33-41.
- 四辻哲章 [2010] 『計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法』，プレアデス出版.

参考文献

- [1] Alexander, C. [2008] *Market Risk Analysis IV: Value at Risk Models*, John Wiley & Sons.
- [2] Anderson, T. W. and Darling, D. A. [1952] “Asymptotic theory of certain ‘goodness of fit’ criteria based on stochastic processes,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 23 (2), pp.193–212.
- [3] Anderson, T. W. and Darling, D. A. [1954] “A Test of Goodness of Fit”, *Journal of the American Statistical Association*, 49 (268), pp.765–769.
- [4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. [1999] “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance*, 9 (3), pp.203–228.
- [5] Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L. [1999] “VaR without Correlations for Portfolios for Portfolios of Derivative Securities,” *Journal of Futures Markets*, 19 (5), pp.583–602.
- [6] Basel Committee on Banking Supervision [1996a] Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks, Basel Committee on Banking Supervision.
- [7] Basel Committee on Banking Supervision [1996b] Supervisory framework for the use of “Backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirement, Basel Committee on Banking Supervision.
- [8] Basel Committee on Banking Supervision [2009a] Principles for sound stress testing practices and supervision, Basel Committee on Banking Supervision.
- [9] Basel Committee on Banking Supervision [2009b] Enhancements to the Basel II framework, Basel Committee on Banking Supervision.
- [10] Basel Committee on Banking Supervision [2009c] Revisions to the Basel II market risk framework, Basel Committee on Banking Supervision.
- [11] Basel Committee on Banking Supervision [2010] Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems, Basel Committee on Banking Supervision.
- [12] Basel Committee on Banking Supervision [2012a] Fundamental review of the trading book, Basel Committee on Banking Supervision.
- [13] Basel Committee on Banking Supervision [2012b] Core principles for effective banking supervision, Basel Committee on Banking Supervision.
- [14] Basel Committee on Banking Supervision [2013a] Basel III: The Liquidity Coverage Ratio and liquidity risk monitoring tools, Basel Committee on Banking Supervision.
- [15] Basel Committee on Banking Supervision [2013b] Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework, Basel Committee on Banking Supervision.
- [16] Bauer, C. [2000] “Value at risk using hyperbolic distributions”, *Journal of Economics and Business*, 52 (5), pp.455–467.
- [17] Bessis, J. [2010] *Risk Management in Banking*, John Wiley & Sons.
- [18] Bollerslev, T. [1986] “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31 (3), pp.307–327.
- [19] Boudoukh, J., Richardson, M., and Whitelaw, R. F. [1998] “The Best of Both Worlds,” *Risk*, 11(5), pp.64–67.
- [20] Bowman, K. O. and Shenton, L. R. [1975] “Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2 ”, *Biometrika*, 62 (2), pp.243–250.
- [21] Chen, Y., Härdle, W. and Jeong, S.O. [2005] “Nonparametric Risk Management with Generalized Hyperbolic Distributions”, *Journal of the American Statistical Association*, 103(483). pp.910–923.
- [22] Chen, Y., Härdle, W. and Spokoiny, V. [2006] “GHICA - Risk Analysis with GH Distributions and Independent Components”, *Journal of Empirical Finance*, 17(2), pp.255–269.
- [23] Choi, P. and Nam, K. [2008] “Asymmetric and leptokurtic distribution for heteroscedastic asset returns: The SU-normal distribution,” *Journal of Empirical Finance*, 15(1), pp.41–63.
- [24] Choudhry, M. [2013] *An Introduction to Value-at-Risk* 5th Edition, John Wiley & Sons.

- [25] D'Agostino, R. B. [1971] "An omnibus test of for moderate and large size samples," *Biometrika*, 58 (2), pp.341–348.
- [26] D'Agostino, R. B. [1986] "Tests for the Normal Distribution," In D'Agostino, R.B. and Stephens, M.A., *Goodness-of-Fit Techniques*, CRC Press, pp.367–419.
- [27] D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. [1986] *Goodness-of-Fit Techniques*, CRC Press.
- [28] D'Agostino, R. B. and Tietjen, G. [1973] "Approach to the null distribution of $\sqrt{b_1}$," *Biometrika*, 60 (1), pp.169–173.
- [29] D'Agostino, R. B. and Pearson, E. S. [1973] "Tests for departure from normality. Empirical results for the distribution of b_2 and $\sqrt{b_1}$," *Biometrika*, 60 (3), pp.613–622.
- [30] D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. [1974] "Corrections and Amendments," *Biometrika*, 61(3), p.647.
- [31] Danielsson, J. and Jorgensen, B. N. [2005] "Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk," *London School of Economics and Political Science, Discussion paper*, 549.
- [32] Danielsson, J., Jorgensen, B. N., Samorodnitsky, G. and Sarmad, M. Vries C.G. de. [2013] "Fat Tails, VaR and Subadditivity," *Journal of Econometrics*, 172(2), pp.283–291.
- [33] Danielsson, J. and Vries, C.G. de [1997] "Tail index and quantile estimation with very high frequency data," *Journal of Empirical Finance*, 4(2-3) pp.241–257.
- [34] Danielsson, J and Vries, C.G. de [2000] "Value-at-risk and extreme returns," *Annales d'economie et de statistique*, 60[Specia]. pp. 236–269.
- [35] Duffie, D. and Pan, J. [1997] "An Overview of Value at Risk," *The Journal of Derivatives*, 4(3), pp.7–49.
- [36] Efron, B. [1979] "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife," *The Annals of Statistics*, 7(1), pp.1–26.
- [37] Engle, R. F. [1982] "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50(4), pp. 987–1007.
- [38] Fajardo, J. S., Farias, A. and Ornelas, J. R. H. [2006] "Goodness-of-Fit Tests Focus on Value-at-Risk Estimation," *Brazilian Review of Econometrics*, 26(2), pp.309–326.
- [39] Fama, E. F. [1965] "The Behavior of Stock-Market Prices," *The Journal of Business*, 38(1), pp.34–105.
- [40] Feller, W. [1966] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons.
- [41] Fischer, M. [2004] "Skew Generalized Secant Hyperbolic Distributions: Unconditional and Conditional Fit to Asset Returns," *Austrian Journal of Statistics*, 33(3), pp.293–304.
- [42] Fischer, M. [2014] *Generalized Hyperbolic Secant Distributions*, SpringerBriefs in Statistics.
- [43] Francq, C. and Zakoian, J.M. [2010] *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, John Wiley & Sons.
- [44] Geary R. C. [1947] "Testing for Normality," *Biometrika*, 34(3/4), pp.209–242.
- [45] Giot, P. and Laurent, S. [2003] "Value-at-risk for long and short trading positions," *Journal of Applied Econometrics*, 18(6), pp.641–663.
- [46] Glasserman, P. [2010] *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Science + Business Media.
- [47] Gumbel, E. J. [1958] *Statistics of Extremes*, Dover Publications.
- [48] Hull, J. and White, A. [1998] "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk," *Journal of Risk*, 1(Fall), pp.5–19.
- [49] Hendricks, D. [1996] "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data," *Economic Policy Review*, 2(1), pp.39–70.
- [50] Hill, B. M. [1975] "A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution," *The Annals of Statistics*, 3(5), pp.1163–1174.
- [51] Iba, Y. [2001] "Population Monte Carlo algorithms," *Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence*, 16(2), pp.279–286.
- [52] Inui, K., Kijima, M., Kitano, A. [2005] "VaR is subject to a significant positive bias," *Statistics & Probability Letters*, 72(4), pp.299–311.
- [53] Jarque, C. M. and Bera, A. K. [1987] "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals," *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 55(2), pp.163–172.

- [54] Johnson, N. L. [1949] “Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation,” *Biometrika*, 36(1/2), pp.149–176.
- [55] Johnson, N. L. [1965] “Table to facilitate fitting SU frequency curves,” *Biometrika*, 52(3/4), pp.547–558.
- [56] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. [1994] *Continuous Univariate Distributions* Vol.1, John Wiley & Sons.
- [57] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. [1995] *Continuous Univariate Distributions* Vol.2, John Wiley & Sons.
- [58] Jorion, P. [1997] *Value at Risk*, Mcgraw-Hill.
- [59] JP Morgan [1996] *RiskMetrics, Technical Document 4th Edition*, RiskMetrics Group.
- [60] Katsuki, Y. and Matsumoto, K. [2014] “Tail VaR Measures in a Multi-period Setting,” *Applied Mathematical Finance*, 21(3), pp.270–297.
- [61] Knight, F. H. [1921] *Risk, Uncertainty, and Profit*, Cosimo.
- [62] Kupiec, P. [1995] “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,” *The Journal of Derivatives*, 3(2), pp.73–84.
- [63] Lai, C. D. [2013] *Generalized Weibull Distributions*, Springer.
- [64] Ljung, G. M. and Box, G. E. P. [1978] “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,” *Biometrika*, 65(2), pp.297–303.
- [65] Manganelli, S. and Engle, R. F. [2001] “Value at Risk Models in Finance,” *ECB Working Paper Series*, 75.
- [66] Manoukian, E. B. and Nadeau, P. [1986] “A Note on the Hyperbolic-Secant Distribution,” *The American Statistician*, 42(1), pp.77–79.
- [67] Markowitz, H. [1952] “Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, 7(1), pp.77–91.
- [68] McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. [2005] *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- [69] Mina, J. and Xiao, J. Y. [2001] *Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard*, RiskMetrics Group.
- [70] Miura, R. and Oue, S. [2000] “Statistical Methodologies for the Market Risk Measurement,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 7(4), pp.305–319.
- [71] Mori, A., Ohsawa, M. and Shimizu, T. [1996] “Calculation of Value at Risk and Risk/Return Simulation,” *IMES Discussion Paper Series* [Bank of Japan].
- [72] Neftci, S. N. [2000] “Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation,” *The Journal of Derivatives*, 7(3), pp.23–37.
- [73] Nelson, C. R. and Siegel, A. F. [1987] “Parsimonious model of the yield curves,” *Journal of Business*, 60(4), pp.473–489.
- [74] Ornelas, J. R. H., Farias, A. R. and Fajardo, J. S. [2004] “Goodness-of-Fit Test focuses on Conditional Value at Risk: An Empirical Analysis of Exchange Rates,” *Brazilian Review of Finance*, 6(2), pp.139–155
- [75] Pritsker, M. [2006] “The hidden dangers of historical simulation,” *Journal of Banking and Finance*, 30(2), pp.561–582.
- [76] Rachev, S. T., Menn, C. and Fabozzi, F. J. [2005] *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions*, John Wiley & Sons.
- [77] Rebonato, R. [2010] *Coherent Stress Testing*, John Wiley & Sons.
- [78] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. [2002] “Conditional value-at-risk for general loss distributions,” *Journal of Banking and Finance*, 26, pp.1443–1471.
- [79] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. [1965] “An Analysis of Variance Test for Normality,” *Biometrika*, 52(3/4), pp.591–611.
- [80] Simonato, J.G. [2011] “The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall,” *The Journal of Derivatives*, 19(1), pp.7–24.
- [81] Simonato, J.G. [2012] “GARCH Processes with Skewed and Leptokurtic Innovations: Revisiting the Johnson SU Case,” *Finance Research Letters*, 9(4), pp.213–219.
- [82] Stuart, R. [2011] “A historical-parametric hybrid VAR,” *Risk*, 24(12), pp.83–87.
- [83] Sweeting, P. [2011] *Financial Enterprise Risk Management*, Cambridge University Press.
- [84] Tuenter, H. [2001] “An algorithm to determine the parameters of SU curves in the Johnson system of probability distributions by moment matching,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 70(4), pp.325–347.

- [85] Wheeler, R. E. [1980] “Quantile Estimators of Johnson Curve Parameters,” *Biometrika*, 67(3), pp.725–728.
- [86] 青沼君明・村内佳子 [2009] 『Excel&VBA で学ぶ VaR』, 金融財政事情研究会.
- [87] 赤池弘次 ほか [2007] 『赤池情報量規準 A I C』, 共立出版.
- [88] 有浦義明 [1998] 『市場・信用リスク管理』, 金融財政事情研究会.
- [89] 安藤美孝 [2004] 「ヒストリカル法によるバリュエーション・アット・リスクの計測」, 『金融研究』, 第 23 巻別冊第 2 号, pp.1–41.
- [90] 家田明 [1997] 「銀行勘定における金利リスクの簡便な把握手法について」, *IMES Discussion Paper Series*, 97-J-1.
- [91] 家田明 [2001] 『リスク計量とプライシング』, 朝倉書店.
- [92] 池森俊文 [1996] 「金利リスクの統合管理について」, 『金融研究』, 第 15 巻第 4 号, pp.61–100.
- [93] 石川達也・内田善彦 [2002] 「モンテカルロ法によるプライシングとリスク量の算出について」, 『金融研究』, 第 21 巻別冊第 1 号, pp.51–89.
- [94] 石島博 [2005] 「レジーム スイッチングモデルとファイナンス理論・実証」, *Waseda University Institute of Finance*, WIF-05-005.
- [95] 磯貝孝 [2014] 「切断安定分布を用いた VaR・ES の計測精度に関する数値的分析」, ジャフイー・ジャーナル『リスクマネジメント』, pp.120–171.
- [96] 伊藤優・木島正明 [2007] 「銀行勘定金利リスク管理のための内部モデル (AA-Kijima Model) について」, 『証券アナリストジャーナル』, 45(4), pp.79–92.
- [97] 梅内俊樹 [2011] 「平常時と危機時を明確に区分したリスク管理」, 『年金ストラテジー』, 175, pp.4–5.
- [98] 大久保豊 [2006] 『銀行ALM』, 金融財政事情研究会.
- [99] 大庭寿和 [1998] 「トレーディング業務における VaR の効果的な活用方法について」, *IMES Discussion Paper Series*, 98-J-20.
- [100] 大山篤之 [2010] 「悩ましさを増すリスク管理のあり方」, 『年金ストラテジー』, 172, pp.6–7.
- [101] 大山剛 [2009] 『グローバル金融危機後のリスク管理』, 金融財政事情研究会.
- [102] 沖本竜義 [2010] 『計量時系列分析』, 朝倉書店.
- [103] 神楽岡優昌・鈴木重信 [2006] 『確率金利モデル』, ピアソン・エデュケーション.
- [104] 加藤宏典 [2011] 「ヘッジファンド運用戦略の事後評価とリスク計測モデルの検討」, 『統計数理』, 59(1), pp.89–103.
- [105] 木島正明 [1998] 『バリュエーション・アット・リスク』, 金融財政事情研究会.
- [106] 木島正明 [1999] 『期間構造モデルと金利デリバティブ』, 朝倉書店.
- [107] 金融庁 [1999] 『預金等受入金融機関に係る検査マニュアル』, 金融庁.
- [108] 九鬼周造 [1935] 『偶然性の問題』, 岩波書店.
- [109] 草場洋方 [2010] 「主成分分析による国債スポットレートカーブの構造把握とその予測可能性の検討」, 『みずほレポート』, 2010 年 9 月 21 日.
- [110] 久保田幸長 [2009] 「市場 VaR 計測の問題点とパラメトリック法による改善」, *IMES Discussion Paper Series*, 2009-J-27.
- [111] 小又雄一郎 [2011] 「東日本大震災によるリスクの変化」, 『NFI リサーチ・レビュー』, 2011 年 7 月号, pp.1–20.
- [112] 金野秀敏 [2010] 『確率論的リスク解析の数理と方法』, コロナ社.
- [113] 佐久間洋明 [2013] 「Modified Value at Risk を用いたポートフォリオ運用」, 『NFI リサーチ・レビュー』, 2013 年 2 月号, pp.1–15.
- [114] 佐々木豊史・宮崎浩一・野村哲史 [2005] 「観測数および銘柄数に依存した VaR の推定誤差に関する実証分析」, 『経営の科学』, 50(4), pp.277–284.
- [115] 佐藤隆文 [2007] 『バーゼル II と銀行監督』, 東洋経済新報社.
- [116] 渋谷政昭 [2006] 「双曲線正割分布の応用」, 『応用統計学』, 35(1), pp.17–47.
- [117] 渋谷政昭 [2006] 「双曲線正割分布の応用」の訂正, 『応用統計学』, 35(2), p.129.
- [118] 城田剛 [2011] 「実践におけるアクターとしての理論」, 『経営と制度』, 9, pp.45–64.
- [119] 高岡和佳子 [2010] 「期待ショートフォールを使うその前に」, 『年金ストラテジー』, 164, pp.4–5.
- [120] 高岡和佳子・大山篤之 [2011] 「金融危機を経てリスク管理に求められるもの」, *NLI Research Institute*

- REPORT, August, pp.28–35.
- [121] 高岡和佳子 [2013] 「リスク評価における収益率分布の再現はどれほど重要か」, 『基礎研レポート』, 2013年03月28日.
- [122] 高島康裕 [1998] 『Value at Risk』, 銀行研修社.
- [123] 竹内均 監修 [2003] 『リスクバジエティングのための VaR』, パンローリング.
原書: Pearson, N. D. [2002] *Risk Budgeting: Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk*, Wiley Finance.
- [124] 田邊政之・桑原大祐・八ツ井博樹・久永 健生・作井博・小西仁 [2008] 『バーゼルII 対応のすべて』, 金融財政事情研究会.
- [125] ダニエルソン, J. ・森本祐司 [2000] 「市場リスクの予測について」, 『金融研究』, 第19巻別冊第2号, pp.1–28.
- [126] 塚原英敦 [2008] 「接合分布関数 (コピュラ) の理論と応用」, 北川源四郎・竹村彰通編『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』, 東京大学出版会, pp.111–146.
- [127] 統計数理研究所 [2010] 『極値統計学』, 統計数理研究所 2010年度公開講座資料.
- [128] 戸坂凡展・吉羽要直 [2005] 「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」, 『金融研究』, 第24巻別冊第2号, pp.115–151.
- [129] 東京三菱銀行資金証券部 [2004] 「景気回復局面における時間軸効果状況」, *Focus on the Markets*, 72, pp.1–10.
- [130] 豊田秀樹 監訳 [2006] 『数理統計学ハンドブック』, 朝倉書店.
原書: Hogg, R. V., McKean, J. W. and Craig, A. T. [2003] *Introduction to Mathematical Statistics*, Pearson Education.
- [131] 中島上智・大森裕浩 [2011] 「一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」, 『日本統計学会誌』, J40(2), pp.61–88.
- [132] 西田真二 [2005] 『ファイナンス確率過程と数値解析 第2版』, シグマベイスキャピタル.
- [133] 日本規格協会 [2010] 『リスクマネジメント—原則及び指針』, 日本規格協会.
- [134] 日本銀行金融機構局 [2011a] 「国際金融危機の教訓を踏まえたリスク把握のあり方」, *BOJ Reports & Research Papers*, 日本銀行.
- [135] 日本銀行金融機構局 [2011b] 「コア預金モデルの特徴と留意点」, *BOJ Reports & Research Papers*, 日本銀行.
- [136] 広田すみれ・森元良太 訳 [2013] 『確率の出現』, 慶應義塾大学出版会.
原書: Hacking, I. [2006] *The Emergence of Probability 2ed.*, Cambridge University Press.
- [137] 藤井真理子・高岡慎 [2008] 「金利の期間構造とマクロ経済」, *FSA Institute*, 19年度ディスカッションペーパー.
- [138] 伏見正則 [1989] 『乱数』, 東京大学出版会.
- [139] 真壁昭雄・久保田幸長 [2006] 『ファイナンス理論の新展開』, 東洋経済新報社.
- [140] 牧野秀樹 [2005] 「不動産投資信託市場における EVT を用いた Value-at-Risk と期待ショートフォール」, 『関西学院商学研究』, 56, pp.131–154.
- [141] 松原望・縄田和満・中井検裕 [1991] 『統計学入門』, 東京大学出版会.
- [142] みずほ証券バーゼル III 研究会 [2012] 『バーゼルIIIによる新国際金融規制』, 中央経済社.
- [143] 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 [2008] 「フィナンシャル・テクノロジーの過去・現在・未来」, 『MTEC ジャーナル』, 特別号.
- [144] 蓑谷千風彦 [2001] 『金融データの統計分析』, 東洋経済新報社.
- [145] 蓑谷千風彦 [2007] 『計量経済学ハンドブック』, 朝倉書店.
- [146] 蓑谷千風彦 [2010] 『統計分布ハンドブック[増補版]』, 朝倉書店.
- [147] 蓑谷千風彦 [2012] 『正規分布ハンドブック』, 朝倉書店.
- [148] 蓑谷千風彦・牧厚志 [2010] 『応用計量経済学ハンドブック』, 朝倉書店.
- [149] 室町幸雄 [2011] 「ストレステスト・フレームワークの再構築へ」, 『年金ストラテジー』, 178, pp.1–3.
- [150] 森棟公夫・照井伸彦・中川満・西埜晴久・黒住英司 [2008] 『統計学』, 有斐閣.
- [151] 山井康浩・吉羽要直 [2001a] 「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について」, 『金融研究』, 第20巻第2号, pp.33–68.

- [152] 山井康浩・吉羽要直 [2001b] 「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測」, 『金融研究』, 第 20 巻別冊第 2 号, pp.53-94.
- [153] 山井康浩・吉羽要直 [2001c] 「リスク指標の性質に関する理論的整理」, 『金融研究』, 第 20 巻別冊第 2 号, pp.95-132.
- [154] 山井康浩・吉羽要直 [2002] 「市場ストレス時におけるバリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較」, 『金融研究』, 第 21 巻第 2 号, pp.111-170.
- [155] 山下智志 [2000] 『市場リスクの計量化と VaR』, 朝倉書店.
- [156] 山分俊幸 [2007] 「Quantile Regression とヒストリカル法を用いた Value-at-Risk 推定の精度比較」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 52(1), pp.131-138.
- [157] 山分俊幸 [2007] 「リスクファクターの直近の変動を考慮した Value-at-Risk 推定」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 52(2), pp.159-169.
- [158] 山分俊幸 [2009] 「線形 Quantile Regression を用いた為替ポートフォリオの Value-at-Risk 推定」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 53(2), pp.267-279.
- [159] 山分俊幸 [2011] 「サブプライム問題が Value-at-Risk 推定に与えた影響」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 55(2), pp.267-286.
- [160] 山分俊幸 [2011] 「線形 Quantile Regression を用いた期待ショートフォールの推定」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 56(2), pp.139-149.
- [161] 湯前祥二・鈴木輝好 [2000] 『モンテカルロ法の金融工学への応用』, 朝倉書店.
- [162] 吉田洋一 [2007] 『バリュー・アット・リスクの基礎知識』, シグマベイスキャピタル.
- [163] 吉羽要直・家田明 [2001] 「イーールドカーブ・モデルのパラメータ推定手法」, *IMES Discussion Paper Series*, 2001-J-10.
- [164] 吉羽要直 [2011] 『金融リスクにおける確率分布の裾および変量間の依存関係の影響と定量化』, 総合研究大学院大学.
- [165] 吉羽要直 [2013] 「ストレス状況を勘案した相関構造とリスク合算」, *Bank of Japan Working Paper Series*, 2013-J-4.
- [166] 吉羽要直 [2014] 「コンピュータの金融実務での活用の展望」, 『証券ジャーナリストジャーナル』, 52(3), pp.33-41.
- [167] 吉藤茂 [2005] 『金融工学とリスクマネジメント』, 金融財政事情研究会.
- [168] 四辻哲章 [2010] 『計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法』, プレアデス出版.
- [169] 四辻哲章 [2013] 『数値データ適合分布』, プレアデス出版.
- [170] 渡部敏明 [2000] 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.
- [171] 汪金芳・田栗正章 [2003] 「ブートストラップ入門」, 『計算統計 I』, 岩波書店, pp.1-64.