（抜　刷）

公債の課税平準化機能

不確実性のないLucas-Stokeyモデルによる考察

小　林　　　航

高　畑　純一郎

千　葉　商　大　論　叢

第54巻　第１号

2016年９月

〔論　説〕

公債の課税平準化機能

不確実性のないLucas-Stokeyモデルによる考察

小　林　　　航
高　畑　純一郎

1. はじめに

本稿では，Lucas and Stokey (1983) の設定をいくつかの観点から変更することにより，公債の課税平準化機能について考察する。この問題に関する先駆的論文はBarro (1979) であり，多くの実証分析がこれに続くが[1]，その後の理論分析が主に依拠するのはLucas and Stokey (1983) である[2]。それでは，Barro (1979) とLucas and Stokey (1983) の本質的な違いはどこにあるだろうか？

Barro (1979) は理論分析と実証分析で構成されるが，その理論モデルにおいて，政府は以下のような予算制約に直面する。

$$g_t + (1+r)b_{t-1}^g = \tau_t y_t + b_t^g \quad (1)$$

ここで，g_tはt期の政府支出（外生），rは時間を通じて一定の利子率（外生），b_tはt期末の公債残高（初期値以外は内生），τ_tとy_tはそれぞれt期の税率（内生）と国民所得（外生）を表しており[3]，通時的な予算制約は

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{g_t}{(1+r)^t} + b_0^g = \sum_{t=1}^{\infty}\frac{\tau_t y_t}{(1+r)^t} \quad (2)$$

となる。そして，以下のような徴税費用（collection cost）の最小化を目的として設定することにより[4]，

---

1 日本では，浅子他（1993），中里（2004），畑農（2009）などがある。

2 Lucas and Stokey (1983) では，資本が存在せず，政府支出が外生的に変動し，保険が利用可能であるという状況を分析している。これに対して，Chari *et al.* (1994) では資本が導入され，政府支出に加えて生産性も変動する。また，Aiyagari *et al.* (2002) では保険が利用不可能となる。そして，Alesina and Tabellini (1990) は政府支出を内生化したうえで再選の不確実性を導入し，与党が財政赤字を戦略的に利用する状況を分析している。

3 Barro (1979, p.942) の(1)式では，τ_tが税率ではなく税額として表記され，その後，それを国民所得Y_tで除したτ_t/Y_tを税率と呼んでいるが，本論文では可能な限りLucas-Stokeyモデルと変数の定義を共通化させるため，τ_tを税率として扱う。また，Barro (1986) は連続時間モデルであるが，そこでは$\tau(t)$を税率とし，$\tau(t)y(t)$を税額として扱っている。

4 Barro (1979, p.943) の(3)式や(4)式では，$f(\cdot)$の前に所得ではなく税額が記載されているが，前後関係

$$Z = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t f(\tau_t)}{(1+r)^t} \quad (3)$$

税率は異時点間で一定に維持することが望ましい，という命題が導出される[5]。これは，政府支出g_tや課税ベースy_tが異時点間で変化するとしても，税率τ_tは変更せずに公債b_tを活用するのが望ましい，という含意を持つ。

他方，Lucas and Stokey (1983) のモデルは[6]，いくつかの重要な点で上記の Barro モデルとは異なる特徴を持つ。第 1 に，Barro (1979) では消費者の効用や行動が明示されず，課税ベースが外生的に与えられる代わりに，課税の厚生費用はアドホックな徴税費用関数として表現されているのに対して，Lucas and Stokey (1983) では消費者の余暇選択や貯蓄選択が内生化されたうえで，労働所得税によって資源配分に歪みが発生する[7]。

第 2 に，Barro (1979) では利子率が外生的に与えられるのに対して，Lucas and Stokey (1983) では，利子率の代わりに異時点間の相対価格の役割を果たす債券価格が内生的に決定される。第 3 に，Barro (1979) では政府の通時的予算制約が唯一の制約条件として明示されているのに対して，Lucas and Stokey (1983) では消費者の通時的予算制約の他に各期の資源制約が存在する。第 4 に，Barro (1979) では政府の目的関数である徴税費用が利子率で割り引かれているのに対して，Lucas and Stokey (1983) では，政府の目的関数である消費者の効用を割り引く際には，利子率から独立した主観的割引率が用いられる。そして第 5 に，Barro (1979) では不確実性が明示的に考慮されていないのに対して[8]，Lucas and Stokey (1983) では政府支出の系列に関する不確実性が考慮されている。

このような設定のもとで，Lucas and Stokey (1983) では，各期の税率はその期の政府支出に依存する，という性質が導出される[9]。つまり，政府支出が異なる場合には異なる税率も許容されるため，税率は異時点間で必ずしも平準化されない。その一方で，論文中で

から誤植と推察される。また，Barro (1986) では目的関数は明示されていない。

[5] Barro (1979) では導出過程は明示されていないが，(2)式の制約下で(3)式を最小化するラグランジュ関数を構築し，τ_tとτ_{t+1}に関する 1 階条件を求めると，ラグランジュ乗数を媒介として$f'(\tau_t) = f'(\tau_{t+1})$となり，$\tau_t = \tau_{t+1}$という解が導出される。

[6] Lucas and Stokey (1983) は財政政策のモデルと金融政策のモデルで構成されるが，本稿で議論の対象としているのは前者である。

[7] Chari and Kehoe (1999) は，Barro (1979) のモデルを誘導型（reduced-form）と表現している。

[8] ただし，理論分析の後半では外生変数の予期せぬ変化が導入される。

[9] 厳密に言えば，これは不確実性のない Example 4 や 6 で導出されるものである。不確実性のある Example 5 や 7 では，各状態の税率はその状態の政府支出に依存する，という性質に修正される。つまり，不確実性がある場合にも，あたかも不確実性がないときと同様の性質が維持されるが，これは不確実性に対する保険が完備されていることによる。この点に着目し，保険が利用できない状況を分析しているのが Aiyagari *et al.* (2002) である。

は「公債発行の機能は時間を通じて歪みを平準化することである」とも記載されている（Lucas and Stokey 1983, p.71）。そこで本稿では，i）各期の政府支出は各期の税率にどのような影響を与えるのか，ii）異時点間で税率が等しくならない場合でも，公債は課税による歪みを平準化できるのか，という2つの問いを追究する。

その際，上述した5つの特徴のうち，特に債券価格（利子率）の内生性と資源制約に着目する。Lucas and Stokey (1983) では，政府が発行した公債はすべて消費者によって保有されるため，利用可能な資源量を異時点間で調節することができない。そのため，ある期に政府支出が増加すれば，その期の私的財や余暇に充てることのできる資源量が減少し，債券価格にも影響を及ぼす。それに対して Barro (1979) では，資源制約や公債の保有者は明示されておらず，ある期に政府支出が増加しても利子率は変化しない。この特徴を Lucas-Stokey モデルで表現するには，消費者や政府が国際貸借市場から資源を調達することのできる小国開放経済として定式化する方法が考えられる[10]。

そこで本稿では，Lucas and Stokey (1983) の設定をベースとしつつ，閉鎖経済と開放経済に分けて分析を行い，その結果を比較する。また，2つめの問いに答えるために，思考実験として一括税が利用可能な状況と，公債が利用不可能な状況も分析する。一括税が利用不可能な状況では課税によって資源配分の歪みが生まれるが，それは一括税が利用可能な状況と比較することによって，より明確になる。また，公債発行によってその歪みを平準化することができるかどうかは，公債が利用できない状況と比較することによって検討することができる。

本稿の構成は以下のとおりである。第2節では基本モデルを構築する。その際，Lucas and Stokey (1983) ではあらかじめ一括税が利用不可能な状況を想定し，更に，外国との貸借ができない状況を仮定しているが，ここでは一括税の利用可能性と開放経済への変更の余地を残す形にする。また，できるだけシンプルな設定とするため，不確実性は除去する。第3節では，一括税が利用可能な状況を想定し，これを閉鎖経済と開放経済の両方で分析する。ここでは，公債発行は資源配分に影響を与えない，という中立命題が成立する。第4節では，一括税が利用不可能な状況を想定し，閉鎖経済と開放経済で税率設定がどのように異なるかを分析する。第5節では，公債が利用不可能な状況を想定することにより，公債が担う課税平準化機能について検討する。第6節はまとめである。

---

10 ただし，Barro (1979) は開放経済であるとは明記せず，Lucas and Stokey (1983) も閉鎖経済であるとは明記していない。

2. 基本モデル

消費者は以下のような効用関数を持つ。

$$u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2) \quad (4)$$

c_tはt期の消費，x_tは余暇であり（$t = 1,2$），βは割引因子である。消費者の予算制約は，

$$c_1 = (1-\tau_1)(1-x_1) - T_1 + pb^h \quad (5)$$

$$c_2 = (1-\tau_2)(1-x_2) - T_2 - b^h \quad (6)$$

となり，τ_tはt期の労働所得税率，T_tは一括税である（$t = 1,2$）。b^hは消費者が第 1 期に発行する債券であり，契約相手が第 2 期にb^hを受け取る権利を第 1 期にpb^hで売る，というものである。b^hが正の場合は借入に相当し，負の場合は貯蓄に相当する。b^hについて特に制約がない場合，これらはb^hを媒介として以下のように統合され，通時的予算制約となる。

$$c_1 + pc_2 = (1-\tau_1)(1-x_1) + p(1-\tau_2)(1-x_2) - T_1 - pT_2 \quad (7)$$

消費者が(7)式の制約のもとで(4)式の効用を最大化するように(c_t, x_t)を選択する場合，その 1 階条件は以下のように表すことができる。

$$\frac{u_x(c_t, x_t)}{u_c(c_t, x_t)} = 1 - \tau_t, \qquad t = 1,2 \quad (8)$$

$$\frac{\beta u_c(c_2, x_2)}{u_c(c_1, x_1)} = p \quad (9)$$

ただし，$u_k(c_t, x_t) \equiv \partial u(c_t, x_t)/\partial k_t$は$k_t$に関する限界効用を表す（$k = c, x$）。5.1 節で分析するように，消費者が何らかの理由で貸借市場にアクセスできない場合，(5)式と(6)式のそれぞれの制約のもとで行動することになり（$b^h = 0$），その場合の 1 階条件は(8)式のみとなる。

Lucas and Stokey (1983) は，政府が解く最適化問題を需要関数の双対性を用いない Primal アプローチで記述しているが，その際，消費者の 1 階条件を予算制約に代入して得られる実行可能性条件（IC：implementability conditions）が必要となる。ここでは，(8)式と(9)式を(7)式に代入することにより，以下のようになる。

$$(c_1 + T_1)u_c^1 + \beta(c_2 + T_2)u_c^2 = (1-x_1)u_x^1 + \beta(1-x_2)u_x^2 \quad (10)$$

ここで，$u_k^t \equiv u_k(c_t, x_t)$は限界効用を簡略化したものである（$k = c, x$）。

次に，政府の予算制約は，

$$g_1 = \tau_1(1 - x_1) + T_1 + pb^g \quad (11)$$

$$g_2 = \tau_2(1 - x_2) + T_2 - b^g \quad (12)$$

となる。g_tはt期の政府支出であり（$t = 1,2$），外生的に与えられるものとする。b^gは政府が第１期に発行する債券，つまり公債であり，消費者と同じ債券価格に直面する。b^gに特に制約がない場合，これらは以下のように統合される。

$$g_1 + pg_2 = \tau_1(1 - x_1) + p\tau_2(1 - x_2) + T_1 + pT_2 \quad (13)$$

最後に，消費者と政府の予算制約を組み合わせることにより，資源制約を以下のように表現することができる。

$$c_1 + x_1 + g_1 = 1 + p(b^g + b^h) \quad (14)$$

$$c_2 + x_2 + g_2 = 1 - (b^g + b^h) \quad (15)$$

閉鎖経済では，$b^g + b^h = 0$としたうえで，(14)式と(15)式をそれぞれ用いることになるのに対して，開放経済では$b^g + b^h \neq 0$が許容され，これらは以下のように統合される。

$$c_1 + x_1 + g_1 + p(c_2 + x_2 + g_2) = 1 + p \quad (16)$$

以下では，これらの概念を用いて公債の課税平準化機能について検討してゆく。

3. 一括税が利用可能な場合

まず，一括税(T_1, T_2)が利用可能な状況を考える。

3.1 閉鎖経済

閉鎖経済では，$b^g + b^h = 0$としたうえで，各期の資源制約(14)(15)式，および実行可能性条件(10)式のもとで効用(4)式を最大化するように(c_t, x_t, T_t)を選ぶ，というのが政府にとっての最適化問題となる（$t = 1,2$）。この問題のラグランジュ関数は，

$$L = u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2)$$
$$+\lambda\{(c_1 + T_1)u_c^1 + \beta(c_2 + T_2)u_c^2 - (1 - x_1)u_x^1 - \beta(1 - x_2)u_x^2\}$$
$$+\mu_1(1 - c_1 - x_1 - g_1) + \mu_2(1 - c_2 - x_2 - g_2) \quad (17)$$

となる。まず，これを一括税T_tについて最適化すると，

$$\lambda = 0 \quad (18)$$

という条件を得ることができる。したがって，実行可能性条件は実質的に制約とはならず，この問題は単に資源制約のもとで効用を最大化するものとなる。

それを踏まえてc_tとx_tについて最適化すると，

$$u_x(c_t, x_t) = u_c(c_t, x_t), \qquad t = 1,2 \quad (19)$$

となり，これを消費者の効用最大化条件である(8)式と組み合わせると，

$$\tau_t = 0, \qquad t = 1,2 \quad (20)$$

となる。つまり，一括税が利用可能な状況では，資源配分に歪みをもたらす労働所得税を利用しないのが最適化条件の 1 つとなるのである。

この最適解を構成する 5 つの内生変数(c_1, c_2, x_1, x_2, p)は，2 つの(19)式，2 つの資源制約，および(9)式という 5 つの方程式の解となる。つまり，政府支出(g_1, g_2)が決まれば資源配分も定まることになり，一括税(T_1, T_2)の組み合わせや公債b^gには依存しない。したがって，公債の中立命題が成立する。

3.2 開放経済

開放経済では，$b^g + b^h \neq 0$が許容されるため，資源制約が(16)式となる他は閉鎖経済と同じであり，最適化問題のラグランジュ関数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} L &= u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2) \\ &+\lambda\{(c_1 + T_1)u_c^1 + \beta(c_2 + T_2)u_c^2 - (1 - x_1)u_x^1 - \beta(1 - x_2)u_x^2\} \\ &+\mu\{1 - c_1 - x_1 - g_1 + p(1 - c_2 - x_2 - g_2)\} \quad (21) \end{aligned}$$

閉鎖経済の場合と同様に，最適化条件として(18)式や(19)式を得ることができる。そして，(20)式も得られ，やはり労働所得税は利用しないことが最適となる。

この最適解を構成する 4 つの内生変数 (c_1, c_2, x_1, x_2)は，2 つの(19)式，1 つの資源制約，および(9)式という 4 つの方程式の解となる。つまり，ここでも政府支出(g_1, g_2)が決まれば資源配分が定まることになり，公債の中立命題が成立する。

命題 1（公債の中立命題）　一括税が利用可能な場合，閉鎖経済であるか開放経済であるかにかかわらず，公債発行は資源配分に影響を及ぼさない。

3.3 比較

それでは，閉鎖経済と開放経済で実現する資源配分は，どのように異なるだろうか。ここでは，2 つの関数型を用いて効用関数を特定化し，検討する。

1 つは Lucas and Stokey (1983) でも使用されている，以下のような 2 次関数である。

$$u(c,x)=c+x-\frac{1}{2}(c^2+x^2) \quad (22)$$

もう 1 つは以下のような対数関数（コブ・ダグラス型）である。

$$u(c,x)=\ln c+\ln x \quad (23)$$

まず，(19)式より，いずれの効用関数の場合でも，また，閉鎖経済か開放経済かにかかわらず以下のようになる。

$$c_t=x_t, \qquad t=1,2 \quad (24)$$

いずれの効用関数においても消費と余暇に置かれる加重が等しいため，労働所得税が使用されない場合には，消費と余暇に対して資源を均等に配分することが望ましいのである。

次に，閉鎖経済では，これと各期の資源制約（$c_t+x_t+g_t=1$）を組み合わせることにより以下のようになる。

$$c_t=x_t=\frac{1-g_t}{2}, \qquad t=1,2 \quad (25)$$

これに対して開放経済では，$\beta=p$を仮定すると，(9)式から$c_1=c_2$となり，これと(24)式，および資源制約(16)式を用いることにより，

$$c_1=c_2=x_1=x_2=\frac{(1-g_1)+\beta(1-g_2)}{4} \quad (26)$$

となる。つまり，閉鎖経済では各期の政府支出はその期の消費と余暇を減らすことによって賄う必要があるのに対して，開放経済では政府支出の負担を異時点間で平準化することができる。これは，開放経済では国際市場における貸借を通じて国内で利用可能な資源量を平準化することができるためである。

4. 一括税が利用不可能な場合

次に，一括税(T_1,T_2)が利用不可能な状況を考える。

4.1 閉鎖経済

ここでも閉鎖経済から始めよう。債券価格（利子率）が内生化され，一括税が利用不可能な状況は，Lucas and Stokey (1983) の設定に対応するものであるが，一括税が利用できない点を除いては 3.1 節と同じ状況であるため，政府にとっての最適化問題に関するラグランジュ関数は，(17)式に$T_t = 0$を代入し（$t = 1,2$），以下のようになる。

$$L = u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2)$$
$$+\lambda\{c_1 u_c^1 + \beta c_2 u_c^2 - (1 - x_1)u_x^1 - \beta(1 - x_2)u_x^2\}$$
$$+\mu_1(1 - c_1 - x_1 - g_1) + \mu_2(1 - c_2 - x_2 - g_2) \quad (27)$$

これをc_tとx_tについて最適化すると，以下のような 1 階条件が導出される（$t = 1,2$）。

$$(1 + \lambda)u_c^t + \lambda\{c_t u_{cc}^t - (1 - x_t)u_{xc}^t\} = (1 + \lambda)u_x^t + \lambda\{c_t u_{cx}^t - (1 - x_t)u_{xx}^t\} \quad (28)$$

この最適解を構成する 6 つの内生変数$(c_1, c_2, x_1, x_2, p, \lambda)$は，2 つの(28)式，2 つの資源制約，それに(9)式と(10)式という 6 つの方程式の解となる。そして，この解を(8)式に代入すれば労働所得税率τ_tが定まり，政府の予算制約$b^g = \tau_2(1 - x_2) - g_2$から公債$b^g$も定まる。つまり，3.1 節とは異なり，公債も最適政策の一部を構成することになるのである。

ところで，t期に関する(28)式は，(c_t, x_t, λ)という 3 つの変数で構成される。したがって，λを所与とすると，この式とt期の資源制約（$c_t + x_t + g_t = 1$）を組み合わせれば(c_t, x_t)が定まることとなる。つまり，g_tを所与とすると，資源制約から(c_t, x_t)に振り向けることのできる資源の総量は$1 - g_t$となり，(c_t, x_t)の組み合わせは(28)式を通じて定まることとなる。したがって，g_tは(c_t, x_t)に影響を及ぼし，(8)式を通じて労働所得税率τ_tにも影響を及ぼすこととなる。

実際には，λも内生変数であるが，λは(g_1, g_2)の双方から影響を受け，各期の(28)式に共通の影響を及ぼすこととなる。したがって，g_tがτ_tに影響を及ぼす経路は，各期の資源制約を通じて発生する直接的なものと，消費者や政府の生涯予算制約からλを通じて発生する間接的なものとに分けて考えることができる。前者の経路が存在することにより，各期の税率はその期の政府支出に依存することとなるのである。

また，(28)式を導出する 1 歩手前の条件を変形し，通時的に組み合わせたうえで実行可能性条件(10)式と各期の資源制約を代入すると[11]，

[11] 詳細は省略するが，このプロセスについては Lucas and Stokey (1983, p.70) を参照されたい。

$$\lambda = -\frac{\mu_1 g_1 + \beta\mu_2 g_2}{Q_1 + \beta Q_2} \quad (29)$$

を得ることができる。ただし,

$$Q_t \equiv (c_t)^2 u_{cc}^t - 2c_t(1-x_t)u_{xc}^t + (1-x_t)^2 u_{xx}^t \quad (30)$$

である。Kuhn-Tucker 条件より$\mu_t > 0$であるから，$Q_t < 0$かつ各期の政府支出がいずれも非負で少なくともどちらかが厳密に正であれば，$\lambda > 0$となる。

4.2 開放経済

続いて開放経済である。開放経済で一括税が利用不可能な状況は，利子率（債券価格）が所与であるという点で，Barro (1979) の設定と整合的なものである。ここでも，一括税が利用できない点を除いては 3.2 節と同じ状況であるため，政府にとっての最適化問題に関するラグランジュ関数は，(21)式に$T_t = 0$を代入し（$t = 1,2$），以下のようになる。

$$L = u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2)$$
$$+\lambda\{c_1 u_c^1 + \beta c_2 u_c^2 - (1-x_1)u_x^1 - \beta(1-x_2)u_x^2\}$$
$$+\mu\{1 - c_1 - x_1 - g_1 + p(1 - c_2 - x_2 - g_2)\} \quad (31)$$

これをc_tとx_tについて最適化すると，4.1 節の(28)式と同一の条件が導出される（$t = 1,2$）。この最適解を構成する 5 つの変数$(c_1, c_2, x_1, x_2, \lambda)$は，2 つの(28)式，1 つの資源制約，(9)式，および(10)式という 5 つの方程式の解となる。4.1 節と同様に，この解を(8)式に代入すれば労働所得税率τ_tが定まり，政府の予算制約から公債b^gも定まる。つまり，3.2 節とは異なり，公債も最適政策の一部を構成している。

ここでも，t期に関する(28)式は，(c_t, x_t, λ)という 3 つの変数で構成されるが，閉鎖経済の場合とは異なり，λを所与としても，t期の資源制約と組み合わせて(c_t, x_t)を定めることはできない。資源制約が 1 本に統合されているため，2 本の(28)式と(9)式を組み合わせることにより，(c_1, c_2, x_1, x_2)が同時に決まるのである。したがって，t期の政府支出g_tが(c_t, x_t)の決定を通じて直接的にτ_tに影響を及ぼすことにはならない。言い換えると，λを所与としても，t期の税率τ_tは(g_1, g_2)を反映するのである。

また，開放経済の場合，(29)式は以下のように修正される。

$$\lambda = -\frac{\mu(g_1 + pg_2)}{Q_1 + pQ_2} \quad (32)$$

4.3 比較

ここでも 3.3 節と同様に 2 つの関数型を用いて効用関数を特定化し，閉鎖経済と開放経済で実現する資源配分を確認する。ただし，ここでは各期の政府支出はいずれも非負であり，少なくともどちらかが厳密に正であるとする。いずれの効用関数においても$Q_t < 0$となるため，閉鎖経済と開放経済のどちらにおいても$\lambda > 0$が成立する。

まず，効用関数が(22)式で与えられる場合，(28)式から以下のような関係が成立する。

$$x_t - c_t = \frac{\lambda}{1 + 2\lambda} > 0 \quad (33)$$

これは一括税が利用可能な場合の(25)式と異なり，労働所得税が相対的に余暇を増やす（労働供給を減らす）方向に資源配分を歪めることを表している。

閉鎖経済の場合，ここに各期の資源制約を代入することにより，

$$c_t = \frac{1 + \lambda}{2 + 4\lambda} - \frac{g_t}{2} \quad (34)$$

$$x_t = \frac{1 + 3\lambda}{2 + 4\lambda} - \frac{g_t}{2} \quad (35)$$

となる。これは一括税が利用可能な場合と同様に，各期の政府支出を，その期の消費と余暇を減らすことによって賄うことを表す。更に，これを(8)式に代入することにより，以下を得ることができる。

$$\tau_t = \frac{2\lambda}{1 + 3\lambda + (1 + 2\lambda) g_t} \quad (36)$$

つまり，λを所与とすると，政府支出g_tはその期の税率τ_tを引き下げる方向に作用する。これは，異時点間で政府支出の水準が異なる場合に，政府支出の多い期ほど税率が低くなることを意味する。

他方，効用関数が(23)式で与えられる場合，(28)式から以下のような関係が成立する。

$$\frac{1}{c_t} - \frac{1}{x_t} = \frac{\lambda}{(x_t)^2} > 0 \quad (37)$$

つまり，2 次関数の場合と同様に，ここでも労働所得税は相対的に余暇を増やす方向に資源配分を歪めている。

閉鎖経済の場合，ここに各期の資源制約を代入し，2 次方程式を解くことにより，

$$c_t = \frac{3(1-g_t) + \lambda - \sqrt{(1-g_t)^2 + 6\lambda(1-g_t) + \lambda^2}}{4} \quad (38)$$

$$x_t = \frac{1 - g_t - \lambda + \sqrt{(1-g_t)^2 + 6\lambda(1-g_t) + \lambda^2}}{4} \quad (39)$$

となり[12]，これを(8)式に代入することにより，以下を得ることができる。

$$\tau_t = \frac{1 - g_t + 3\lambda - \sqrt{(1-g_t)^2 + 6\lambda(1-g_t) + \lambda^2}}{2\lambda} \quad (40)$$

そして，これを(λ, g_t)の関数とみなし，g_tについて偏微分すると，

$$\frac{\partial \tau_t}{\partial g_t} = \frac{1 - g_t + 3\lambda - \sqrt{(1-g_t)^2 + 6\lambda(1-g_t) + \lambda^2}}{2\lambda\sqrt{(1-g_t)^2 + 6\lambda(1-g_t) + \lambda^2}} > 0 \quad (41)$$

となる[13]。つまり，2 次関数の場合と異なり，ここでは政府支出の多い期ほど税率が高くなるのである。これらの性質は以下の命題としてまとめることができる。

命題 2　一括税が利用できない場合，閉鎖経済では，効用関数が(22)式（2 次関数）で与えられるケースでは，政府支出が多い期に税率を低くするのが望ましいのに対して，効用関数が(23)式（対数関数）で与えられるケースでは，政府支出が多い期に税率を高くするのが望ましい。

他方，開放経済の場合，3.3 節と同様に，いずれの効用関数の場合でも，$\beta = p$ を仮定することにより，(9)式から$c_1 = c_2$となる。また，これと(28)式から$x_1 = x_2$となり，更に(8)式から

$$\tau_1 = \tau_2 \quad (42)$$

となる。つまり，以下の命題が成立する。

命題 3　一括税が利用できない場合，開放経済において$\beta = p$ であるときには，効用関数が(22)式か(23)式かにかかわらず，異時点間で政府支出が異なる状況でも税率は等しくするのが望ましい。

---

[12] 2 次方程式を解くと 2 つの解が発生するが，(39)式右辺の分子の根号の係数が負となる解の場合，x_tが負となることから排除される。

[13] (41)式の分子が正であることは，根号の手前の 3 つの項の和を 2 乗し，根号の中身と比較することによって確認できる。

5. 一括税と公債が利用不可能な場合

最後に，一括税(T_1, T_2)に加え，公債b^gも利用不可能な状況を考える。

5.1 閉鎖経済

まずは閉鎖経済からである。消費者と政府しか存在しない閉鎖経済では，公債が利用できない場合，消費者も貯蓄や借入を行うことができない。その場合，消費者の選択を織り込んだ実行可能性条件は，各期の予算制約(5)(6)式に，$T_t = b^h = 0$としたうえで(8)式を代入したものであり，以下のようになる。

$$c_t u_c^t = (1 - x_t) u_x^t, \qquad t = 1,2 \quad (43)$$

政府の最適化問題は，各期の資源制約と各期の実行可能性条件である(43)式を制約とすることになり，そのラグランジュ関数は以下のようになる。

$$L = u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2)$$
$$+\lambda_1 \{c_1 u_c^1 - (1 - x_1) u_x^1\} + \lambda_2 \{c_2 u_c^2 - (1 - x_2) u_x^2\}$$
$$+\mu_1 (1 - c_1 - x_1 - g_1) + \mu_2 (1 - c_2 - x_2 - g_2) \quad (44)$$

これをc_tとx_tについて最適化すると，以下のような1階条件が導出される（$t = 1,2$）。

$$(1 + \lambda_t) u_c^t + \lambda_t \{c_t u_{cc}^t - (1 - x_t) u_{xc}^t\} = (1 + \lambda_t) u_x^t + \lambda_t \{c_t u_{cx}^t - (1 - x_t) u_{xx}^t\} \quad (45)$$

式の形は(28)式に似ているが，実行可能性条件に関するラグランジュ乗数λ_tが各期で異なりうるという点が特徴である。

この最適解を構成する6つの内生変数$(c_1, c_2, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$は，2つの(45)式，2つの資源制約，および2つの(43)式という6つの方程式の解となる。そして，この解を(8)式に代入すれば労働所得税率τ_tが定まるが，公債を利用できないため，政府の予算制約から

$$\tau_t (1 - x_t) = g_t, \qquad t = 1,2 \quad (46)$$

が各期に成立することとなる。

5.2 開放経済

次に開放経済に移ろう。閉鎖経済では，公債が利用不可能な場合には消費者も貸借ができなかったが，開放経済では，公債が利用できなくても消費者は海外の貸借市場にアクセスすることができる。その場合，これまでの延長上で最適化問題を定式化しようとすると

問題が生じる。というのも，消費者が貸借可能であれば，消費者の予算制約も資源制約も1本に統合することができるが，統合された資源制約と実行可能性条件を制約条件とする場合，最適化問題は4.2節と同じものとなる。つまり，その定式化では政府が貸借不可能であるという制約を表現することができないのである。

その問題への対処法として，ここでは実行可能性条件を消費者の予算制約からではなく，政府の予算制約から導出する。各期の政府の予算制約において$T_t = b^g = 0$としたうえで，消費者の効用最大化条件(8)式を代入すると，以下のような条件が導出される。

$$(1 - x_t)(u_c^t - u_x^t) = g_t u_c^t, \qquad t = 1,2 \quad (47)$$

ここでは，この条件を制約として使用し[14]，政府の最適化問題に関するラグランジュ関数は以下のようになる。

$$L = u(c_1, x_1) + \beta u(c_2, x_2)$$
$$+\lambda_1\{(1 - x_1)(u_c^1 - u_x^1) - g_1 u_c^1\} + \lambda_2\{(1 - x_2)(u_c^2 - u_x^2) - g_2 u_c^2\}$$
$$+\mu\{1 - c_1 - x_1 - g_1 + p(1 - c_2 - x_2 - g_2)\} \quad (48)$$

これをc_tとx_tについて最適化すると，以下のような1階条件が導出される（$t = 1,2$）。

$$(1 + \lambda_t)(u_c^t - u_x^t) + \lambda_t\{(1 - x_t)(u_{cc}^t - 2u_{cx}^t + u_{xx}^t) - g_t(u_{cc}^t - u_{cx}^t)\} = 0 \quad (49)$$

この最適解を構成する6つの内生変数$(c_1, c_2, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$は，2つの(49)式，1つの資源制約，2つの(47)式，および(9)式という6つの方程式の解となる。そして，この解を(8)式に代入すれば労働所得税率τ_tが定まるが，ここでも公債が利用できないため，政府の予算制約(46)式は各期に成立する（$t = 1,2$）。

5.3 比較

ここでも効用関数を特定化したうえで，閉鎖経済と開放経済で実現する資源配分を比較するが，ここでは外生変数も特定化し，数値例を用いてこれまでの議論を総括する。

まず，政府支出は$g_1 = 0.1$，$g_2 = 0$とする。つまり，第1期にのみ政府支出が必要となる。次に，消費者の主観的な割引因子を$\beta = 1$とし，開放経済では債券価格を$p = 1$に固定する。この設定のもとで，各ケースにおける主要な変数は表1と表2のようになる。

---

[14] 本来，資源制約，消費者の予算制約，および政府の予算制約という3つの制約条件は，どれか2つが満たされれば残り1つも自動的に満たされるという性質がある。しかしながら，統合された資源制約と統合された消費者の予算制約が満たされても，統合されない各期の政府の予算制約が満たされるとは限らないのに対して，統合された資源制約と統合されない各期の政府の予算制約が満たされれば，統合された消費者の予算制約も自動的に満たされる。したがって，統合された資源制約と各期の(47)式を用いれば，ここでの最適化問題を記述することができる。

表 1　効用関数が 2 次関数の場合

一括税	利用可能		利用不可能		利用不可能	
公債	利用可能		利用可能		利用不可能	
貸借市場	閉鎖	開放	閉鎖	開放	閉鎖	開放
c_1	0.450	0.475	0.421	0.447	0.387	0.442
x_1	0.450	0.475	0.479	0.503	0.513	0.573
c_2	0.500	0.475	0.471	0.447	0.500	0.442
x_2	0.500	0.475	0.529	0.503	0.500	0.442
τ_1	0.000	0.000	0.101	0.101	0.205	0.234
τ_2	0.000	0.000	0.110	0.101	0.000	0.000
b^g	—	—	0.052	0.050	0.000	0.000
b^h	—	—	-0.052	0.000	0.000	0.115
U	1.448	1.449	1.446	1.447	1.444	1.442

表 2　効用関数が対数関数の場合

一括税	利用可能		利用不可能		利用不可能	
公債	利用可能		利用可能		利用不可能	
貸借市場	閉鎖	開放	閉鎖	開放	閉鎖	開放
c_1	0.450	0.475	0.424	0.450	0.400	0.441
x_1	0.450	0.475	0.476	0.500	0.500	0.578
c_2	0.500	0.475	0.474	0.450	0.500	0.441
x_2	0.500	0.475	0.526	0.500	0.500	0.441
τ_1	0.000	0.000	0.110	0.100	0.200	0.237
τ_2	0.000	0.000	0.100	0.100	0.000	0.000
b^g	—	—	0.048	0.050	0.000	0.000
b^h	—	—	-0.048	0.000	0.000	0.118
U	-2.983	-2.978	-2.989	-2.983	-2.996	-3.006

主要な特徴は 5 つある。第 1 に，閉鎖経済では政府支出をすべて第 1 期の資源で賄うのに対して，開放経済では利用可能な資源量が平準化されている。第 2 に，一括税が利用可能な場合，労働所得税率はゼロとなり，公債の水準は確定しない。これは，公債が資源配分に影響を与えず（命題 1），一括税との組み合わせで様々な値をとりうることによるもの

である。第 3 に，一括税が利用できず，かつ公債が利用可能な場合には，各期において$c_t < x_t$となっているのに対して，公債が利用できない場合には，政府支出の必要な第 1 期にのみに$c_t < x_t$となっている。これは，公債を活用できないと，労働所得税がもたらす歪みを異時点間で平準化できないことを意味する。

第 4 に，一括税が利用できず公債が利用可能な場合，閉鎖経済で効用関数が 2 次関数のケースでは$\tau_1 < \tau_2$，対数関数のケースでは$\tau_1 > \tau_2$となっているのに対して（命題 2），開放経済では$\tau_1 = \tau_2$となっている（命題 3）。ただし，閉鎖経済では$\tau_1 \neq \tau_2$となるものの，その差は 1 割程度であり，公債が利用できない場合に比べれば，税率も平準化されていると考えて問題なさそうである。Chari *et al.* (1994) は，彼らの分析結果に関する主要な特徴の 1 つとして，「労働所得に対する税率は実質的に一定である（essentially constant）」と述べているが，ここでも同じことが言えるだろう。

第 5 に，公債が利用できない場合，閉鎖経済よりも開放経済のほうがτ_1が高い。これは，第 1 期に税負担が集中するため，消費者はその負担を減らそうとして借入を行い，その結果，第 1 期においては所得効果によって課税ベースである労働供給が減少し，税率を引き上げる必要が生じるためと考えられる。その結果，効用水準の低下幅も開放経済のほうが大きくなっている[15]。

6. まとめ

本稿では，公債の課税平準化機能について考察するため，Lucas and Stokey (1983) のモデルから不確実性を除去し，一括税と公債の利用可能性，および開放経済と閉鎖経済の違いに着目して分析を行った。主な結果としては以下の 3 点にまとめられる。

第 1 に，一括税が利用可能な場合には公債の中立命題が成立するが，利用不可能な場合には公債を活用することによって課税による歪みを平準化することができ，この性質は閉鎖経済でも開放経済でも成立する。これは，Barro (1979) 以降，広く知られてきた公債の課税平準化機能を，一括税が利用可能な状況と利用不可能な状況，および公債が利用不可能な状況を比較することを通じて，より明確に示したものである。

[15] Corsetti and Roubini (1997) は Alesina and Tabellini (1990) の分析を開放経済に拡張し，政府による対外借入を禁止した場合の影響を分析している。開放経済において，政府に対して借入制約を課すという意味では我々の分析とも似ているが，本論文の場合は政府の借入そのものが不可能という状況を分析しているため，直接的な比較はできない。

第 2 に，一括税が利用不可能な場合に，閉鎖経済では各期の政府支出がその期の税率に影響を与えるのに対して，開放経済で割引率と利子率が等しいときには，各期の税率はその期の政府支出に依存せず等しくなる。つまり，Barro (1979) で示された性質が Lucas and Stokey (1983) の枠組みで実現するには，開放経済で利子率が一定であり，なおかつ割引率と利子率が等しくなることが必要となる。

第 3 に，公債が利用不可能な場合，課税の歪みを平準化することができないため，利用可能な場合よりも効用水準が低下するが，その低下幅は閉鎖経済よりも開放経済のほうが大きい。これは均衡財政原則のような公債発行ルールが存在する場合に，その副作用が経済環境によって変化することを意味する。公債発行ルールの経済効果を検討する際には，こうした点にも留意する必要がある。

謝辞

本稿は日本財政学会第 72 回大会における報告論文に加筆修正を施したものである。討論者の畑農鋭矢氏（明治大学）からは大変有益なコメントをいただいた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

[1] Aiyagari, S. R., A. Marcet, T. J. Sargent and J. Seppala (2002) , “Optimal Taxation without State-Contingent Debt,” *Journal of Political Economy* 110(6), pp.1220-1254.

[2] Alesina, A. and G. Tabellini (1990) , “A Positive Theory of Fiscal Deficits and Debt in a Democracy,” *Review of Economic Studies* 57(3), pp.403-414.

[3] Barro, R.J. (1979) , “On the Determination of the Public Debt,” *Journal of Political Economy* 87(5), pp.940-971.

[4] Barro, R.R. (1986) , “U.S. Deficits Since World War I,” *Scandinavian Journal of Economics* 88(1), pp.195-222.

[5] Chari, V.V., L.J. Christiano and P.J. Kehoe (1994) , “Optimal Fiscal Policy in a Business Cycle Model,” *Journal of Political Economy* 102(4), pp.617-652.

[6] Chari, V.V. and P.J. Kehoe (1999), “Optimal Fiscal and Monetary Policy,” in J.B. Taylor and M. Woodford [ed] *Handbook of Macroeconomics* 1C, North-Holland, Ch.26.

[7] Corsetti, G. and N. Roubini (1997) , “Politically Motivated Fiscal Deficits : Policy Issues in Closed and Open Economies,” *Economics and Politics* 9(1), pp.27-54.

[8] Lucas, Jr. R.E. and N.L. Stokey (1983) , “Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital,” *Journal of Monetary Economics* 12(1), pp.55-93.

[9] 浅子和美・福田慎一・照山博司・常木淳・久保克行・塚本隆・上野大・午来直之 (1993) 「日本の財政運営と異時点間の資源配分」『経済分析』第 131 号.

[10] 中里透 (2004) 「課税平準化仮説と財政運営」井堀利宏[編]『日本の財政赤字』岩波書店，第 4 章.

[11] 畑農鋭矢 (2009) 『財政赤字と財政運営の経済分析』有斐閣.

（2016.7.20 受稿，2016.8.1 受理）

［抄録］

本稿では，各期の政府支出を税率との関係に焦点を当てながら公債の課税平準化機能について考察するため，Lucas and Stokey (1983) のモデルから不確実性を除去したうえで，閉鎖経済と開放経済に分けて分析を行い，その結果を比較する。閉鎖経済では，各期の政府支出がその期の税率に影響を与えるが，開放経済で割引率と利子率が等しいときには，各期の税率はその期の政府支出に依存せず等しくなる。つまり，Barro (1979) で示された性質が Lucas and Stokey (1983) の枠組みで実現するには，開放経済で利子率が一定であり，なおかつ割引率と利子率が等しくなることが必要である。