

交換経済環境での交渉問題

内海 幸久*

1 序

ゲーム理論における交渉問題は、Nash (1950) に端緒を発する。この論文の中で Nash はいくつかの公理の下でどのような解が交渉の帰結として望ましいのかについて論じている。ジャックとビル の例でも述べられているように、交渉の状況は、本来、何らかの経済的な環境から構成される。本論文では、交換経済から交渉問題を構成し、どのような公理の下で Nash 交渉解が得られるのか、交渉解から誘導される配分について論じることにする。

Nash, Kalai = Smorodinsky, 比例配分を初めとする交渉解の公理化については、多くの研究がなされている。例えば、Roth (1979), Peters (1992) によって、解の公理体系や性質など多くの成果がまとめられている。

公理的な側面の研究に対して、物々交換を代表とする経済環境下での交渉問題に関する研究には、Yoshihara (2003), Trokel (2005) などがある。Yoshihara は生産経済の下で、技術に関する公理から、交渉解の導出し、解の性質について比較を行っている。一方、Trokel は 2 人タイプの無限人の経済環境下においてワルラス均衡と Nash 交渉解の関係について論じている。本論文では、純粋交換経済下において Nash 交渉解がどのような条件下で誘導されるのか、また、Nash 交渉解によって誘導された配分が交換経済のワルラス均衡と異なることを示す。Utsumi (2009) において、交換経済のコア配分と Nash 交渉解から誘導された配分の関係調べている。

次章において、交換経済から構成される交渉問題のモデルについて論じ、3 章にて Nash 交渉解が誘導される公理について検討する。4 章にて、いくつかの具体例を検討し、5 章にて帰結を述べることにする。

2 モデル

$N = \{1, \dots, n\}$ を消費者の集合とする。 \mathbb{R}_+^l を消費集合とする。 $\mathcal{U} = \{u: \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}\}$ を効用関数の集合とする。 n 人 l 財の交換経済は、関数 $e: N \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^l$ によって表現される。 $e(i)$ を (u_i, ω_i) と書き、それぞれを消費者 i の効用関数、初期保有量と呼ぶこととする。 $\mathcal{E} = \{e: N \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^l\}$ を n 消費者の交換経済の集合とする。本稿では複数の交換経済を比較するために、 \mathcal{E} の要素を単に経済環境と呼ぶことにする。非減少連続凹効用関数の集合を $\mathcal{U}_\infty = \{u \in \mathcal{U} | u: \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R} \text{ が連続, 凹, 非減少関数}\}$ と表記し、このような効用関数のクラスに制限した交換経済の集合を \mathcal{E}_∞ と表記する。即ち、 $\mathcal{E}_\infty = \{e: N \rightarrow \mathcal{U}_\infty \times \mathbb{R}_+^l\}$ とする。

ある経済環境 $e \in \mathcal{E}$ における実現可能は配分の集合は

*本研究は2009年度学術助成金を得て作成されたものであり、お礼を申し上げます。

$$A(e) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{l \times n} \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \right\}$$

と定義される。

また、ある経済環境 $e \in \mathcal{E}$ おける個人合理的な効用水準は

$$d_i(e) = \max \{u_i(x_i) \mid x_i \leq \omega_i\}$$

と定義される。

ある経済環境 $e \in \mathcal{E}$ おける効用可能性集合は、

$$B(e) = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in A(e) : \forall i \in N, u_i \leq u_i(x_i)\}$$

と定義される。

命題 1 .

任意の $e \in \mathcal{E}_{co}$ について

1. $d_i(e) = u_i(\omega_i)$ がすべての $i \in N$ で成立し、
2. $B(e)$ は上に有界な非空、閉、凸、包括集合となり、
3. $(d_1(e), \dots, d_n(e)) \in B(e)$ を得る。

各経済環境ごとに配分を与える規則を次のように定義する。

定義 1 .

配分規則 $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ とは、 $\phi(e) = (\phi_1(e), \dots, \phi_n(e)) \in A(e)$ を満たす関数である。

一方、交渉問題とは上に有界な非空、閉、凸、包括集合である交渉の帰結を表現する効用の集合 B と交渉が決裂した際に得られる効用を表現する交渉決裂点 $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ の組からなる。交渉問題からどのような交渉の結果を与えるのかを定める規則を交渉解と呼んでいる。つまり、 $(B, d) \mapsto f(B, d) = (f_1(B, d), \dots, f_n(B, d))$ という関数によって表現されるものである。

命題 1 を使うと、経済環境 $e \in \mathcal{E}_{co}$ から生成される交渉問題は、 $(B(e), (d_1(e), \dots, d_n(e)))$ と定義される。生成された交渉問題の集合を便宜上 $\mathcal{B}(\mathcal{E}_{co})$ と表記する。これらから、経済環境から生成された交渉問題の交渉解は、 $f: \mathcal{B}(\mathcal{E}_{co}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ という関数によって表現される。交換経済の環境において各消費者が独立に交渉による取引をするとどのようになるのかが分析できることになる。

定義 2 .

配分規則 ϕ が交渉解 f を誘導するとは、任意の $\phi: \mathcal{E}_{co} \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ に対して、ある交渉解 $f: \mathcal{B}(\mathcal{E}_{co}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在し、すべての $e \in \mathcal{E}$ と $i \in N$ について $f_i(B(e), d(e)) = u_i(\phi_i(e))$ を満たすことである。

通常、交渉問題の交渉解は効用で記述される。配分規則が交渉解を誘導できるというこ

とは、交渉の帰結が効用になるのではなく、これが元々の構成要素である財ベクトルで記述できるという意味を持つ。

3 公理化

定義 3 .

配分規則 $\phi: \mathcal{E}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ がパレート効率的であるとは、任意の $i=1, \dots, n$ に対して、 $u_i(x_i) \geq u_i(\phi_i(e))$ であり、少なくともある $j=1, \dots, n$ については、 $u_j(x_j) > u_j(\phi_j(e))$ を満たすような実現可能な配分 $(x_1, \dots, x_n) \in A(e)$ が存在しないことである。

定義 4 .

配分規則 $\phi: \mathcal{E}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ が対称的であるとは、任意の $\{u_i, \omega_i\}_{i=1}^n = e \in \mathcal{E}_\infty$ に対して $u_1 = \dots = u_n$, $\omega_1 = \dots = \omega_n$ であるならば、 $\phi_1(e) = \dots = \phi_n(e)$ が成立することである。

即ち、効用関数や初期保有量が対称的であるならば、配分規則によって得られる帰結も対称的であるという意味である。

表記を簡略化するために、経済環境 e と $\{u_i, \omega_i\}_{i=1}^n$ を、また、 e' と $\{u'_i, \omega'_i\}_{i=1}^n$ を、同一視する。即ち、初期保有量は等しいが、効用関数のみがことなる交換経済である。

定義 5 .

配分規則 $\phi: \mathcal{E}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ が正アフィン変換に対して整合的であるとは、任意の $i=1, \dots, n$ について、ある $a_i > 0$ とある $b_i \in \mathbb{R}$ が存在して、 $u'_i = a_i u_i + b_i$ と規定される二種類の経済環境 $e, e' \in \mathcal{E}_\infty$ に関して、 $u_i(\phi_i(e')) = a_i u_i(\phi_i(e)) + b_i$ がすべての $i=1, \dots, n$ で成立することである。

表記を簡略化するために、経済環境 e^1 と $\{u_i^1, \omega_i^1\}_{i=1}^n$ を、また、 e^2 と $\{u_i^2, \omega_i^2\}_{i=1}^n$ を、同一視する。

定義 6 .

配分規則 $\phi: \mathcal{E}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ が無関連対象から独立であるとは、任意の経済環境 $e^1, e^2 \in \mathcal{E}_\infty$ について

- (1) $B(e^2) \subset B(e^1)$,
- (2) 任意の $i=1, \dots, n$ について、 $u_i^1(\omega_i^1) = u_i^2(\omega_i^2)$,
- (3) $(u_1^1(\phi_1(e^1)), \dots, u_n^1(\phi_n(e^1))) \in B(e^2)$

を満たすならば、 $u_i^1(\phi_i(e^1)) = u_i^2(\phi_i(e^2))$ がすべての $i=1, \dots, n$ で成立することである。

命題 2 .

パレート効率的、対称的、正アフィン変換に対して整合的、無関連対象から独立の4つを満たす配分規則 $\phi: \mathcal{E}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^{l \times n}$ は、唯一存在し Nash 交渉解を誘導する。

命題によって誘導された Nash 交渉解を Nash 配分規則と呼ぶことにする。

証明. 証明の大筋は、任意の $e \in \mathcal{E}_\infty$ について、 $f_i(B(e), d(e)) = u_i(\phi_i(e))$ を満たす交渉解が存在を示し、その解が Nash 交渉解になることを確認すればよい。まず、 $f_i(B(e), d(e)) = u_i(\phi_i(e))$ とおく。各公理を交渉解 f を使って修正する。

配分規則がパレート効率的であることは、次のように修正される。任意の $i=1, \dots, n$ に

対して、 $\mu_i \geq f_i(B(e), d(e))$ であり、少なくともある $j=1, \dots, n$ については、 $\mu_j > f_j(B(e), d(e))$ を満たす $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in B(e)$ が存在しないことである。

配分規則が対称的であることは、次のように修正される。任意の $\{u_i, \omega_i\}_{i=1}^n = e \in \mathcal{E}_\infty$ に対して $u_1 = \dots = u_n$, $\omega_1 = \dots = \omega_n$ であるならば、 $f_1(B(e), d(e)) = \dots = f_n(B(e), d(e))$ が成立することである。

任意の $i=1, \dots, n$ について、ある $a_i > 0$ とある $b_i \in \mathbb{R}$ が存在して、 $u'_i = a_i u_i + b_i$ と規定される二種類の経済環境 $e, e' \in \mathcal{E}_\infty$ に関して、

$$\begin{aligned} u'_i(\omega_i) &= a_i(\omega_i) + b_i \\ &= \max \{u'_i(x_i) \mid x_i \leq \omega_i\} \\ &= d_i(e') \end{aligned}$$

が成り立つ。また、交渉決裂点について、

$$\begin{aligned} d_i(e') &= a_i(\omega_i) + b_i \\ &= a_i d_i(e) + b_i \end{aligned}$$

となる。交渉決裂点についても正のアフィン変換が施されることになる。

この時、配分規則が正アフィン変換に対して整合的であることは、次のように修正される。任意の $i=1, \dots, n$ について、ある $a_i > 0$ とある $b_i \in \mathbb{R}$ が存在して、 $u'_i = a_i u_i + b_i$ と規定される二種類の経済環境 $e, e' \in \mathcal{E}_\infty$ に関して、 $f_i(B(e'), d(e')) = a_i f_i(B(e), d(e)) + b_i$ がすべての $i=1, \dots, n$ で成立することである。

配分規則が無関連対象から独立であることを言い換える。 $(u_1^1(\phi_1(e^1)), \dots, u_n^1(\phi_n(e^1))) \in B(e^2)$ は $(f_1(B(e^1), d(e^1)), \dots, f_n(B(e^1), d(e^1))) \in B(e^2)$ と置き換えられる。 $u_1^1(\phi_1(e^1)) = u_1^2(\phi_1(e^2))$ であることより、 $f_1(B(e^1), d(e^1)) = f_1(B(e^2), d(e^2))$ となる。これより、配分規則が無関連対象から独立であることは、次のように修正される。任意の経済環境 $e^1, e^2 \in \mathcal{E}_\infty$ について

- (1) $B(e^2) \subset B(e^1)$,
- (2) 任意の $i=1, \dots, n$ について、 $d_i(e^1) = d_i(e^2)$,
- (3) $(f_1(B(e^1), d(e^1)), \dots, f_n(B(e^1), d(e^1))) \in B(e^2)$

を満たすならば、 $f_i(B(e^1), d(e^1)) = f_i(B(e^2), d(e^2))$ がすべての $i=1, \dots, n$ で成立することである。

上記の修正した4つの性質を満たす交渉解 $f: \mathcal{B}(\mathcal{E}_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Nash 交渉解として唯一存在し、その値は、

$$\max_{(u_1, \dots, u_n) \in B(e)} \prod_{i=1}^n (u_i - d_i(e))$$

で与えられることが知られている。これより、配分規則は Nash 交渉解を誘導することになる。

4 例

Nash 配分規則の具体例をみてみよう。例 1 は、Nash 配分規則による配分が交換経済のコアに含まれ、しかも、競争均衡配分と一致する例となっている。例の状況においてのみだが、物々交換の領域内で、交渉がなされると、どのような状況が起こりえるのかが特徴付けられることになる。しかしながら、例 2 によって、競争均衡配分と、Nash 配分規則による配分はかならずしも一致しないことがわかる。

例 1. $n=2$ の 2 財の交換経済を考える。消費者 i の効用関数を $u_i(x_i, y_i) = \sqrt{x_i} + \sqrt{y_i}$ とする。消費者 1 の初期保有量を $\omega_1 = (1, 3)$ 、消費者 2 の初期保有量を $\omega_2 = (3, 1)$ とする。各値の定義より、個人合理的な水準は $d_i(e) = 1 + \sqrt{3}$ と求まる。また、効用可能性集合の第一象限の境界は、図 1 の様に $u_1^2 + u_2^2 = 16$ に従う。

この時、Nash 交渉解を求めるには、効用可能性集合の制約内で、 $(u_1 - 1 - \sqrt{3})(u_2 - 1 - \sqrt{3})$ を最大にすればよい。即ち、図 1 の様に、 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ と求まる。この効用水準を実現する配分、即ち、Nash 配分規則によって求まる配分は、消費者 1 に $(2, 2)$ 、消費者 2 に $(2, 2)$ を与えるものである。

例 1 では、Nash 配分規則によって定まる配分が、競争均衡配分と同一であった。しかし、両者には一般的な関係がないことが例 2 からわかる。

図 1 2 人 2 財の交換経済における効用可能性集合などのグラフ

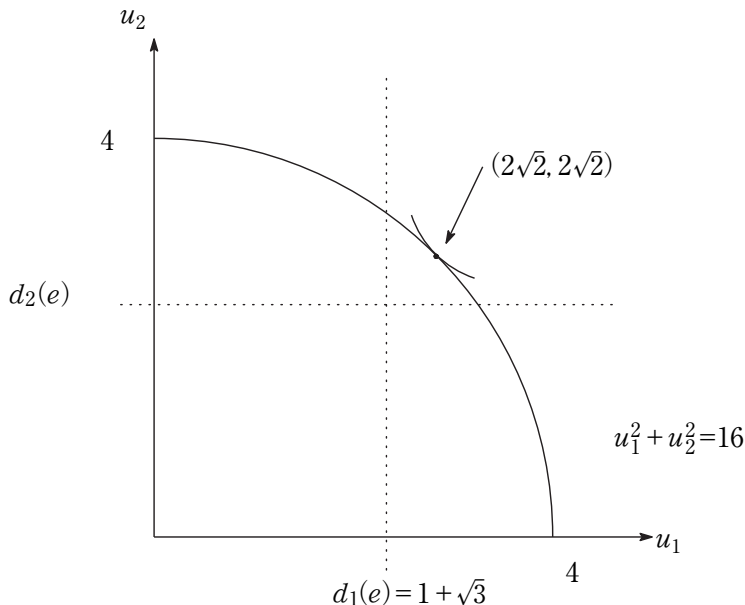
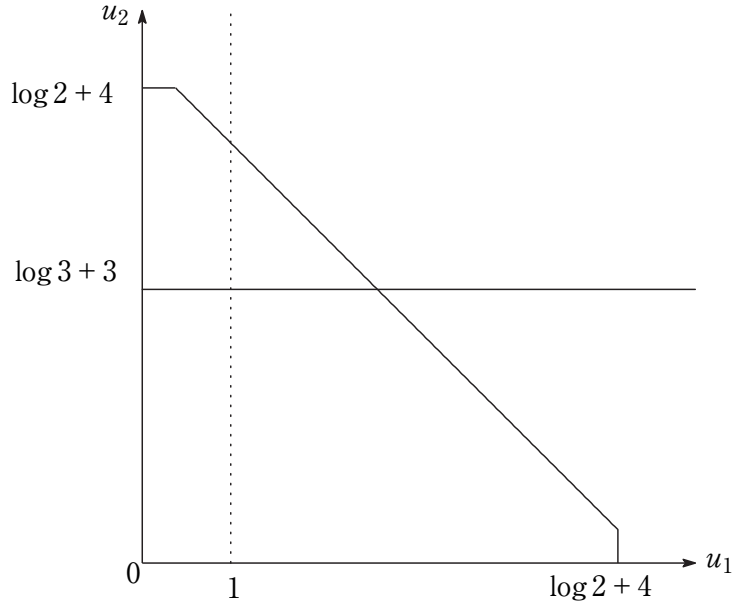


図2 2人2財準線形効用の交換経済における効用可能性集合などのグラフ



例2. $n=2$ の2財の交換経済を考える。消費者 i の効用関数を $u_i(x_i, y_i) = \log x_i + y_i$ とする。即ち、準線形効用関数を持つとする。消費者1の初期保有量を $\omega_1 = (1, 1)$ 、消費者2の初期保有量を $\omega_2 = (3, 3)$ とする。

各値の定義より、個人合理的な水準は $d_1(e) = 1$ 、 $d_2(e) = \log 3 + 3$ と求まる。また、効用可能性集合の第一象限の境界は、図2の様に複数の直線で規定される。正確には、

$$B(e) = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \leq \log 2 + t, u_2 \leq \log 2 + 4 - t, 0 \leq t \leq 4\}$$

と求まる。これを図示すると図2のようになる。

この時、Nash 交渉解を求めるには、効用可能性集合の制約内で、 $(u_1 - 1)(u_2 - \log 3 - 3)$ を最大にすればよい。即ち、図2の様に、 $(\frac{1}{2} \log \frac{4}{3} + 1, \frac{1}{2} \log 12 + 3)$ と求まる。この効用水準を実現する配分、即ち、Nash 配分規則によって求まる配分は、消費者1に $(2, \log \frac{\sqrt{3}}{3} + 1)$ 、消費者2に $(2, \log \sqrt{3} + 3)$ を与えるものである。

この経済の競争均衡配分は、消費者1に $(2, \frac{1}{2})$ 、消費者2に $(2, \frac{7}{2})$ となる。

これより、Nash 配分規則によって定まる配分と競争均衡配分は、必ずしも同一の配分を与えるものでないことがわかる。

5 帰結

本論文では、交換経済から構成される交渉問題とその解について考察した。標準的な経済環境下では、交換経済が自然な形で交渉問題に導入でき、交換経済下でのパレート性、対称性、正のアフィン変換に対する整合性、無関連対象からの独立性から Nash 配分規則が誘導されることを示した。最後に、具体例を通してではあるが、交渉解から構成される

配分は交換経済のコアや競争均衡との関係性を明らかにした。

参考文献

- Nash, J. F., (1950) “The Bargaining Problem,” *Econometrica* **18**, 155-162.
- Peters, H., (1992) *Axiomatic Bargaining Game Theory*, Kluwer Academic Publishers
Dordrecht Boston London.
- Roth, A. E., (1979) *Axiomatic Models of Bargaining*, Springer Verlag, Berlin
Heidelberg New York.
- Trokel, W., (2005) “Core-equivalence for the Nash Bargaining Solution,” *Economic Theory* **25**, 255-263.
- Utsumi, Y., (2009) “Note on the Basic Relationships between Core and Nash Allocation Rule in Economic Environments” mimeo.
- Yoshihara, N., (2003) “Characterizations of Bargaining Solutions in Production Economies with Unequal Skills,” *Journal of Economic Theory* **108**, 256-285.

[抄 録]

本論文では、交換経済から構成される交渉問題とその解について考察する。標準的な経済環境下では、交換経済が自然な形で交渉問題に導入でき、交換経済下でのパレート性、対称性、正のアフィン変換に対する整合性、無関連対象からの独立性から Nash 配分規則が誘導されることを示す。最後に、具体例を通してではあるが、交渉解から構成される配分は交換経済のコアや競争均衡との関係性を明らかにする。