確率動学による市場シェアの分析

内　海　幸　久

1　序

消費の多様化の中，インターネットの普及などの影響もあり，ある種の企業戦略によって急激に市場占有率が変わるという現象もまれではなくなっている。どのように市場占有率が変動するのであろうか。市場占有率がどのように変遷するのかを記述する議論は，経済分析の話題であまり触れられていない。動学の状況を分析するにあたっても定常状態の分析が中心で，どのように変化してゆくのかという過程の分析はあまり焦点が当てられてこなかった。

我々が観察することができる具体例を想起してみよう。ライバル関係にあるファーストフード店Ａ，Ｂを考えよう。ファーストフード店Ａが広告戦略や販売促進の努力をするとファーストフード店Ｂから顧客を奪うことに成功するかもしれない。また，コンピュータの基本ソフト産業の市場において，ある特定のブランドを利用しているユーザーが大半を占めている場合もある。このソフトウエアーメーカーは，市場を独占するべく，販売促進の努力をおこなったり，大規模な広告を行うかもしれない。これらの販売促進努力によって，更に，多くのコンピュータユーザーがA社のブランドを購入，利用する可能性が高まる。B社ブランドのコンピュータ基本ソフトから乗り換えてでも，A社ブランドのコンピュータ基本ソフトを利用する可能性もある。このような直観的な例を確率動学を利用して説明することが本稿の主要な目的である。

市場占有率のダイナミクスの分析は，大きく三種類に分けられよう。第一がオペレーションズリサーチ型の手法，第二が進化ゲーム理論を応用した手法，第三が産業組織論で展開される時系列分析の手法である。第一のオペレーションズリサーチの手法では，市場占有率の動向が常微分方程式によって近似されることが多い。実際，柳井（1983）に代表されるように，市場占有率が何故変わるのかという消費者心理よりも，変化を如何にうまく近似できるかに主眼が置かれている。実証的なデータとの整合性もよく，ある意味で予測精度が高い分析方法といえる。第二の進化ゲーム理論を応用した手法は，消費者の心理変化のような状況を取り込んだ確率進化モデルとなっている。遠藤（2005）は，Kandori, Mailath and Rob（1993）やKandori and Rob（1998）などで展開される確率進化過程を巧妙に市場占有率の変遷に適用している。プレーヤーである消費者がランダムマッチしてどの商品を購入してゆくのかという確率進化動学の基本的な性質が明らかにされた。消費者の選択行動からモデルを構成するために，複雑な動学になる。この為実証データとの整合性にかけるのが難点であろう。第三の時系列分析の手法は，上記の二種類の分析とは様相が異なる。実際の市場占有率のデータからどのように変遷しているのかを推計することを目標としている。古くはMaddala（1983）などで解説されており，Martin（1993）などで具体的な事例研究が紹介されている。具体的な実証データとの整合性が特徴ではあ

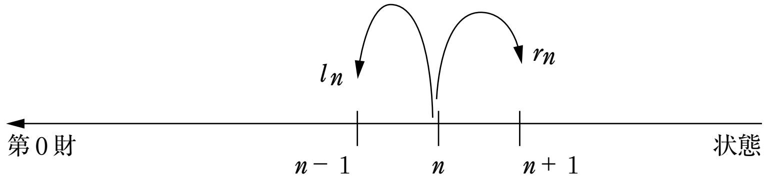

図１：l_n と r_n は遷移確率をあらわす。

るものの，第一，第二の手法と異なり市場占有率の変遷過程や意思決定の過程があまり考慮されていない。

本稿のアプローチは第一と第二の手法の統合，つまり，市場占有率の変遷過程と意思決定過程の二種類を同時に記述したオペレーションズリサーチ的な手法である。Kunigami and Terano（2006）では，意思決定過程に確率過程を導入して市場の状態をモデル化することに成功している。彼らは，n 財の Cournot 型モデルにマルコフ連鎖型の社会学習モデルを応用して長期的な市場の状態がカオス的な振る舞いになることを明らかにした。また，Aoki and Shirai（2000）は，本稿と類似の手法を利用して確率的な意思決定過程を導入してダイヤモンドのサーチを再考した。本稿のモデルは，二種類の財ではあるもの消費者の意思決定である購入問題と企業の意思決定である販売促進などの戦略を考慮に入れた社会学習モデルを考察する。動学的な分析の多くは長期的な趨勢である定常状態を分析することが多い。しかしながら，本稿では，非定常状態を含めて確率過程の明示的な解を表現し，特徴付けを試みたい。また，非定常状態を明示的に求めることで，実証データによる検証も可能となるであろう。

本稿の構成は下記のとおりである。次章にてマスター方程式と呼ばれる市場占有率を記述している動学方程式を紹介する。３章にて，定常状態，非定常状態に分けて基本的な性質を明らかにする。４章にて若干ながらシミュレーションを紹介し，５章で論をまとめることにする。

2　基本モデル

基本モデルを紹介する。市場には二種類の財が存在するとする。便宜上，第０財，第１財とする。第０財を生産する企業を企業０第１財を生産する企業を企業１と呼ぶこととする。市場の全体規模は固定されていると仮定し，その規模を N とおく。この仮定より，企業０が n 単位，第０財を売り上げると，財０の市場占有率は，$\dfrac{n}{N}$ によってあらわされる。市場占有率を変遷を評価するために，状態集合を $S=\{0, 1, \ldots, N\}$ とおき，その代表的な要素を n とする。n は第１財の市場における販売数量を表す指数であると解釈できる。これらより，各々の財の市場の占有率は $\left(\dfrac{n}{N}, 1-\dfrac{n}{N}\right)$ と表される。

次に，財の購買行動についてモデル化する。本稿では，無数の消費者が第０財を購入するか，第１財を購入するかを絶えず考えているとする。消費者はその結果の一部として，その時々の市場占有率を知ることが可能だと考える。

具体的には，微小の期間 Δt において，一人の消費者が第０財か第１財を選択するとす

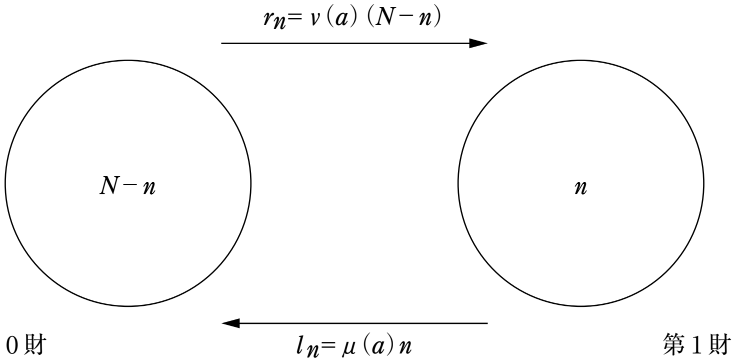

図2：r_n は状態 n の時に経済主体が商品1を選択する遷移確率を表す。逆に，l_n は，商品0を選択する遷移確率を表す。

る。状態 n から $n+1$ になる確率は，$r_n\Delta t+o(\Delta t)$ と定義される。ここで，r_n は，微小の期間における第1財を選択する遷移確率と考えることができる。同様にして，状態 n から $n-1$ になる確率は，$l_n\Delta t+o(\Delta t)$ と定義される。ここで，l_n は，微小期間における第0財を選択する遷移確率とみなせる。

本稿では，遷移確率を図2で表されるように，

$$r_n = \nu(a)(N-n) \tag{1}$$

$$l_n = \mu(a)n \tag{2}$$

と特定化する。ここで，a は $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルで，広告戦略などの販売促進の効果を測定する概念であるとする。

$r_n = \nu(a)(N-n)$ は，状態が n の時，$N-n$ の消費者の各々が $\nu(a)$ の割合で心変わりをする，すなわち，第0財から第1財を購入する確率を表す。逆に，$l_n = \mu(a)n$ は，n の消費者が $\mu(a)$ の割合で，購入する財を第1財から第0財へ変更する。

広告戦略などの販売促進の効果を測定する。あるベクトル a の構成要素の一つ，a_i について $\dfrac{\partial\mu}{\partial a_i} < 0$ もしくは，$\dfrac{\partial\nu}{\partial a_i} > 0$ が成立するのであれば，a_i を通して第0財の販売量が増加する。このことから，このような a_i を第0企業の販売努力，ないしは，広告戦略と解釈することができる。同様にして，ある a_j について，$\dfrac{\partial\mu}{\partial a_j} > 0$ もしくは，$\dfrac{\partial\nu}{\partial a_j} < 0$ が成立するのあれば，a_j を通して第1財の販売量が増加する。これより，a_j を第1企業の販売努力とみなすことが可能である。このような解釈から，$\mu(a)$ and $\nu(a)$ という割合は，企業の販売促進効果を表現するとも考えられる。実際，アルコール飲料の市場は広告効果が直接売り上げに影響するとも言われている。

このような確率を利用することで，状態の変化を記述するマスター方程式と呼ばれる方程式を組み立てることができる[1]。$P_n(t)$ を t 期における市場占有率が $\left(\dfrac{n}{N},\ 1-\dfrac{n}{N}\right)$ となる確率とする。遷移の状態は

(1)　この形の方程式の導出方法に関しては，Aoki（1996，1998）に詳細が記載されている。

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu(a)(n+1)P_{n+1}(t) + \nu(a)(N-n+1)P_{n-1}(t) - \mu(a)nP_n(t)$$
$$-\nu(a)(N-n)P_n(t) \tag{3}$$

によって記述される。本稿の主要な目的は遷移の表す方程式（3）を分析することにある。

3　基本的な性質

マスター方程式の基本的な性質を明らかにする。まず，定常状態の特徴を求め，次に，非定常状態，すなわち方程式の解を明示的に求める方法について議論する。

3．1　定常状態

市場占有率が，$\left(\frac{n}{N}, 1-\frac{n}{N}\right)$ となる確率の極限を $\pi_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$ と定義する。定常状態で状態 n に存在する確率が π_n と解釈できる。マスター方程式（3）の定常解は，詳細釣合条件である

$$\mu(a)n\pi_n = \nu(a)(N-n+1)\pi_{n-1}$$

から得られる。

性質１．

定常状態 π_n は，

$$\pi_n = \left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right)^n \frac{N!}{n!(N-n)!}\pi_0$$
$$\pi_0 = \left(1+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right)^k \frac{N!}{k!(N-k)!}\right)^{-1}$$

によって，一意に与えられる。また，定常分布 $(\pi_0, \ldots, \pi_N)$ は，初期条件 $P_{n0}=1$ に依存せずに決まる。

定常分布において，最も起こり得る，即ち，最も確率の高い状態は，

$$\max_n \pi_n$$

によって与えられる。

性質２．

- $\nu(a) = \mu(a)$ であるならば，状態 $\frac{N}{2}$ が π_n を最大にする状態となる。
- $\nu(a) > \mu(a)$ であるならば，状態 N が π_n を最大にする状態となる。
- $\nu(a) < \mu(a)$ であるならば，状態 0 が π_n を最大にする状態となる。

この性質より，ライバル企業よりも過大な広告戦略をとった企業の方が，長期的視点で考えると市場占有率を独占することが分かる。

次の章ではマスター方程式 (3) の非定常解がどのように振る舞うのかについて分析する。

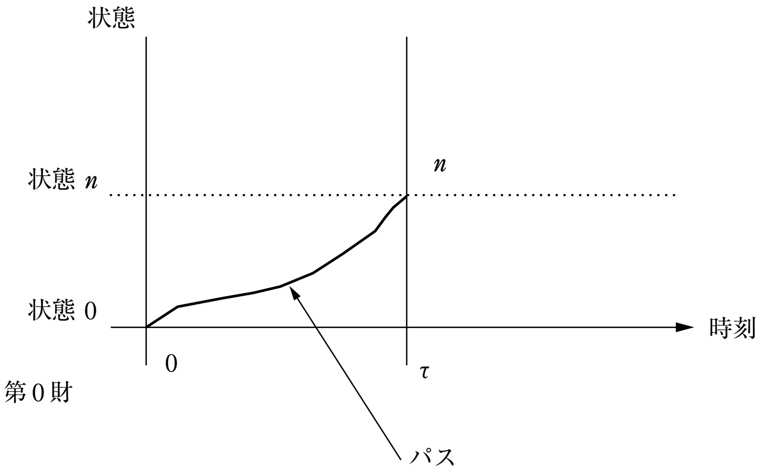

図 3 ：グラフは，状態 0 から出発して時刻 τ に状態 n に到達している例である。

3．2　非定常状態

マスター方程式（3）の非定常解を明示的に表現し，特徴付けを行う。明示的に非定常解を求めることで，例えば，時刻 τ において，市場占有率が $\left(\frac{n}{N}, 1-\frac{n}{N}\right)$ となる確率を知ることが可能も可能となる。この確率を利用すると，企業 1 は追加的な広告戦略を打つべきか否かの意思決定をすることも可能になる。図 2 は，遷移確率の状況を一例を示したものとなっている。

マスター方程式（3）を解くために，

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t) \tag{4}$$

と定義された生成関数を援用する。

$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{dP_n}{dt}$ と $\frac{\partial G}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n P_{n+1}(t) z\frac{\partial G}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n P_n(t)$ であることに注意して，生成関数にあてはめてマスター方程式計算すると

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (z-1)(\mu(a)+z\nu(a))\frac{\partial G}{\partial z} = \nu(a)(z-1)NG(z,t) \tag{5}$$

となる。

この偏微分方程式はCharpit の方法で解くことが出来る。初期状態が n_0 とおく。この時，

$$G(z,t) = \left(\frac{\mu(a)+z\nu(a)+(z-1)e^{-\beta t}\mu(a)}{\mu(a)+z\nu(a)-(z-1)e^{-\beta t}\nu(a)}\right)^{n_0}\left(\frac{\mu(a)+z\nu(a)-(z-1)e^{-\beta t}\nu(a)}{\nu(a)+\mu(a)}\right)^{N} \tag{6}$$

を得る。ここで，$\beta = \nu(a)+\mu(a)$ と定義される。更に $G(z,t)$ を単純化のために，下記のように書き換える。

$$\begin{aligned} G(z,t) &= (1+\lambda)^{-N}(\lambda+z+\lambda(z-1)e^{-\beta t})^{n_0}(\lambda+z-(z-1)e^{-\beta t})^{N-n_0} \\ &=:(1+\lambda)^{-N} f(z) g(z). \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\lambda\dfrac{\mu(a)}{\nu(a)}$ となる。単純化のために，$n_0=0$ を仮定する。これより，

$$G(z,t)=(1+\lambda)^{-N}g(z)$$

を得る。$g(z)$ に関するテイラー展開によって，$P_n(t)$ は z^n の係数として与えられる。これより，

$$P_n(t)=(1+\lambda)^{-N}\frac{1}{N!}N(N-1)\cdots(N-n+1)(\lambda+e^{-\beta t})^{N-n}(1-e^{-\beta t})^n$$

を得る。

性質３.

$n_0=0$ であるとする。マスター方程式の非定常解は

$$\begin{aligned}P_n(t)&=\left(1+\frac{\mu(a)}{\nu(a)}\right)^{-N}\frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{\mu(a)}{\nu(a)}+e^{-\beta t}\right)^{N-n}(1-e^{-\beta t})^n\\&=\left(1+\frac{\mu(a)}{\nu(a)}\right)^{-N}\binom{N}{n}\left(\frac{\mu(a)}{\nu(a)}+e^{-\beta t}\right)^{N-n}(1-e^{-\beta t})^n\end{aligned}\tag{8}$$

と与えられる。ここで，β は $\mu(a)+\nu(a)$ とする。

一般的な場合も同様の手法によって，$f(z)$，$g(z)$ や $P_n(t)$ を z^n の係数によって求めることが出来る。n_0 を初期状態とする。この時，$P_n(t)$ の非定常解は，下記のように求められる。

命題１.

初期状態を n_0 とする。この時，非定常解は

$$\begin{aligned}P_n(t)=\left(1+\frac{\mu(a)}{\nu(a)}\right)^{-N}\sum_{k=0}^{n\wedge n_0}\Bigg[&\binom{n_0}{k}\left(\frac{\mu(a)}{\nu(a)}-\frac{\mu(a)}{\nu(a)}e^{-\beta t}\right)^{n_0-k}\left(1+\frac{\mu(a)}{\nu(a)}e^{-\beta t}\right)^k\\&\times\binom{N-n_0}{n-k}\left(\frac{\mu(a)}{\nu(a)}+e^{-\beta t}\right)^{N-n_0-n+k}\left(1-e^{-\beta t}\right)^{n-k}\Bigg]\end{aligned}\tag{9}$$

によって与えられる。ここで，β は $\nu(a)+\mu(a)$ とする。

例１.

- $\nu(a)>\mu(a)$ であるならば，確率 $P_n(t)$ は増加する。
- $\nu(a)<\mu(a)$ であるならば，確率 $P_n(t)$ は減少する。

３.３　外部性の考慮

このセクションでは，各経済主体が選択肢を変更する可能性，つまり，心変わりや嗜好の変化といった効果を導入する。このような効果を測定するために，r_n や l_n といった遷移確率を特定化することにしよう。それぞれ，

$$r_n=\nu(a)\left(1-\frac{n}{N}\right)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right)$$

$$l_n=\mu(a)\left(\frac{n}{N}\right)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right)$$

と与えるとする。

$\eta_1\left(\dfrac{n}{N}\right)$ や $\eta_2\left(\dfrac{n}{N}\right)$ は非線形のノイズの様なものである。前者は，経済主体が実際に

選択肢0から選択肢1に変更する割合を示し，後者は，好みの変化割合を示したものである。η_1 と η_2 は，市場占有率 $\dfrac{n}{N}$ に依存することから，好みへの外部効果と解釈することが可能である。

$\eta_1\left(\dfrac{n}{N}\right)$ は，

$$\mathrm{Prob}\left(V_1-V_0\geq 0\,|\,\frac{n}{N}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\left(y-m\left(\frac{n}{N}\right)\right)^2}{2\sigma^2}}dy,$$

と定義する。ここで，V_i は選択肢 i の価値や効用である。逆に，η_2 を $1-\eta_1\left(\dfrac{n}{N}\right)$ と定義する。

このような状況の下で，マスター方程式を導出すると

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\mu(a)\left(\frac{n+1}{N}\right)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right)P_{n+1}(t)+\nu(a)\left(\frac{N-n+1}{N}\right)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right)P_{n-1}(t)$$
$$-\mu(a)\left(\frac{n}{N}\right)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right)P_n(t)-\nu(a)\left(\frac{N-n}{N}\right)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right)P_n(t) \qquad (10)$$

となる。マスター方程式（10）から外部性の効果を分析することが可能となる。しかしながら，これまでのように非定常解を明示的に求めることは難しい。従って，再び定常状態に焦点をあてて分析を試みる。エラー関数の定義から

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-y^2}dy$$

を得る。これより，

$$\mathrm{Prob}(V_1-V_0\geq 0\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(y-m(x))^2}{2\sigma^2}}dy$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{m(x)}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right]$$

エラー関数 erf（x）は，$1-\dfrac{2}{1-\exp\left[\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}x\right]}$ となる。これより，

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}x}-e^{-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}x}+e^{-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x}}$$

によって近似されることが知られているので，これを利用すると，

$$\eta_1\left(\frac{n}{N}\right)=\mathrm{Prob}\left(V_1-V_0\geq 0\,|\,\frac{n}{N}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{m\left(\frac{n}{N}\right)}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)}}{e^{\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)} + e^{\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)}}$$

を得る。ここで，γ は $\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sigma}}$ と与えられる。更に，

$$\eta_2\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{e^{-\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)}}{e^{\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)} + e^{\gamma m\left(\frac{n}{N}\right)}}$$

も得る。定常状態を議論するので，$\pi_n = \lim_{t\to\infty}P_n(t)$ とする。(10) 式の定常状態は

$$\pi_n = \pi_0\binom{N}{n}\left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{\eta_1\left(\frac{j}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{j}{N}\right)}$$

によって与えられるので，

$$\log\ \pi_n = \log\ \pi_0 + \log\binom{N}{n} + n\log\left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right) + \sum_{j=1}^{n}\log\frac{\eta_1\left(\frac{j}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{j}{N}\right)}$$

となる。Stirling の公式より，

$$\log\ \pi_n = \log\ \pi_0 + \log\binom{N}{n} + n\log\left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right) + \sum_{j=1}^{n}2\gamma m\left(\frac{j}{N}\right)$$

$$= \log\ \pi_0 + n\log\left(\frac{\nu(a)}{\mu(a)}\right) + \sum_{j=1}^{n}2\gamma m\left(\frac{j}{N}\right) - \frac{n}{N}\log\frac{n}{N} - \left(1-\frac{n}{N}\right)\log\left(1-\frac{n}{N}\right) \qquad (11)$$

を得る。ここで，γ は $\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sigma}}$ である。

(11) 式を利用することで市場占有率の長期的な趨勢としての外部効果の特徴，特に定常状態の停留点を特徴付けることが出来る。加えて，市場が複数の停留点を持つ場合，広告効果のパラメータである $a \in \mathbb{R}^n$ の影響によってどの停留点が選択されるのかを知ることが出来る。

シミュレーション例

γ の値を変えたシミュレーションを実行する。図 4，図 5 は定常状態の停留点が一つ，または，複数ある状況を記したものである。

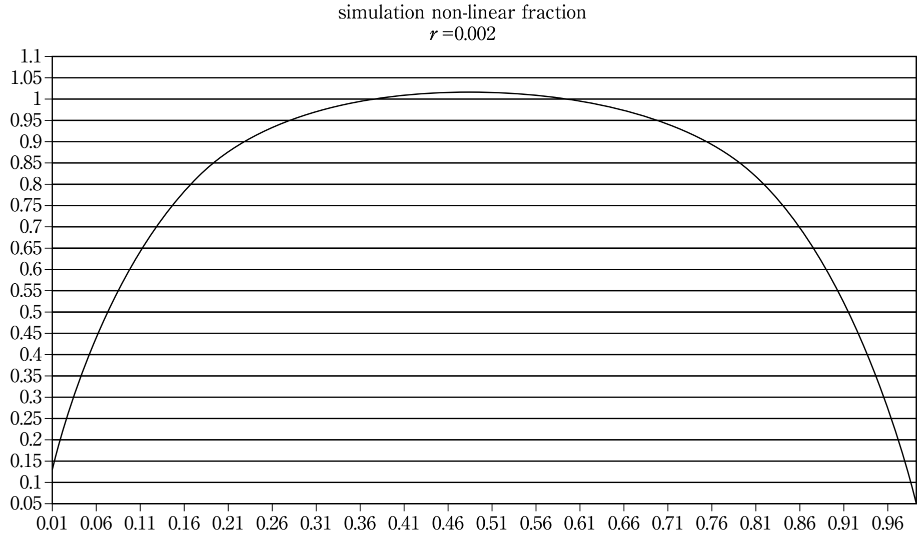

図 4

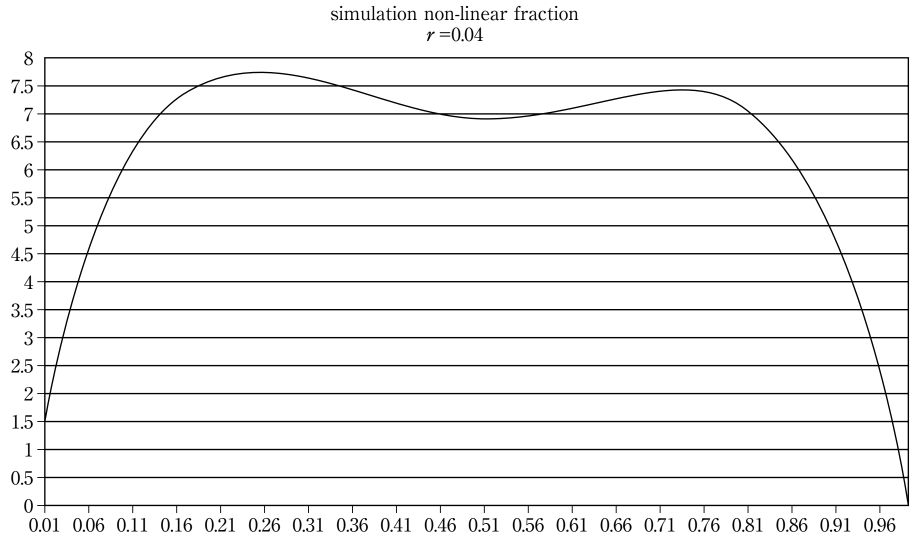

図 5

4　帰結と展望

本稿では，非定常状態に焦点を当てた分析を行った。ダイナミクスを分析する従来の研究は長期的な状態である定常状態に焦点を当て，短期的な変化についてはあまり考慮されてこなかった。本稿では，この短期的な趨勢をも分析するにために，明示的に非定常解を解き，その性質を明らかにした。主な帰結は，以下にまとめられる。両企業とも追加的な広告戦略は，それぞれの市場占有率を上昇させる効果がある。しかしながら，定常状態という長期的な視点から見ると，初期条件に依存せずに，企業のファンダメンタルズによって市場占有率が決定される。

嗜好の変化とも呼べるエラー関数を導入し，外部効果の影響が市場占有率にどのような影響を与えるのかについても考察した。モデルの煩雑さのため定常状態での分析にとどまるが，エラー関数の導入によって，長期的には複数の市場占有率が起こりえることが判明した。

本稿のモデルの展望としては，集合Nが有限でない場合どのようになるのか，また，意思決定問題を導入するとどのようになるのかなどが考えられよう。

5 参考文献

Aoki, M. (1996) *New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria, and Externalities as Field Effects*. New York: Cambridge University Press.

Aoki, M. (1998) "Simple Model of Asymmetrical Business Cycles: Interactive Dynamics of a Large Number of Agents with Discrete Choices" Macroeconomic Dynamics, 2:427-442.

Aoki, M. and Y., Shirai. (2000) "A New Look at the Diamond Search Model: Stochastic Cycles and Equilibrium Selection in Search Equilibrium." *Macroeconomic Dynamics* 4, 487-503.

Kandori, Mailath and Rob (1993) "Learning, Mutation and Long Run Equilibria in Games," *econometrica* 61 (1), 29-56

Kandori and Rob (1998) Bandwagon Effects and Long Run Technology Choice *Games and Economic Behavior* 22, 30-60

Kunigami,. M. and T., Terano (2006) "Chaotic Behavior and its Risk Harnessing in an Economic Market" *the 20th Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence*

Maddala, G. S. (1983) *Limited Dependent and Qualitative Variables in Econometrics.* New York: Cambridge University Press.

Martin, S. (1993) *Advanced Industrial Economics. Chapter 7.* Oxford UK and Cambridge USA: Blackwell.

遠藤妙子 (2005)「消費者の嗜好の多様性とネットワーク外部性を伴う財の市場占有率」東京経大学会誌。243 5 T4-4

柳井浩 (1983)「数学の図解」共立出版。

〔抄　録〕

本稿では，市場占有率の成長過程を確率動学を利用してモデル化し，分析を試みる。主として，非定常状態に焦点を当てた分析を行い，どのような市場占有率の変遷が見られるのかが明らかとされる。主な帰結は，以下にまとめられる。

両企業とも追加的な広告戦略は，それぞれの市場占有率を上昇させる効果がある。しかしながら，定常状態という長期的な視点から見ると，初期条件に依存せずに，企業のファンダメンタルズによって市場占有率が決定される。嗜好の変化とも呼べるエラー関数を導入し，外部効果の影響が市場占有率にどのような影響を与えるのかについても考察する。モデルの煩雑さのため定常状態での分析にとどまるが，エラー関数の導入によって，長期的には複数の市場占有率が起こりえることが判明する。