α 水準コアの基本的性質

内　海　幸　久

1　序

複雑な現代社会では不確定要素が大きくあいまいな状況でしか表現し得ない事柄も多数存在し得る。このようなあいまいな社会問題を分析するにあたり，Zadeh（1965）はファジィという概念を提唱した。あいまいさを記述できるファジィの概念はオペレーションズリサーチでの成功を始め，徐々にその応用範囲を広げ，現在ではゲーム理論や経済学にまでその領域を広げている。本稿では，ファジィの概念をゲーム理論に応用した解概念，とりわけ α 水準コアの性質について議論をする。

ファジィ概念のゲーム理論への本格的な応用は，Aubin（1982）から始まると考えられている。Aubin は，プレーヤーの提携への部分的な協力を表現することにファジィ概念を導入し，提携がファジィとなる TU ゲームを考案した。後に，このファジィ提携 TU ゲームは，コアや Shapley 値など TU ゲームの解概念への拡張がなれた。しかしながら，数学的な拡張という側面を持ち，社会科学への応用例はあまり見られない。他方，予想の形成に関してファジィの概念を導入したモデルも考案された。複数の予想を形成する可能性を許した TU ゲームで，Mareš（2000）や Nishizaki and Sakawa（1992），（2000），Molina and Tejada（2002），Ishihara and Utsumi（2006）などによって研究されているファジィ値をもつゲームとして知られている。このゲームは，ある提携で得られる利得が正確にわからないような状況の時に，その利得をファジィ数によって表そうとするゲームである。提携が得られる利得に複数の可能性が考えられるような状況を分析する際，利得を一点に定めることなく扱うことが可能となる。このため，一部ではあるがMareš（2001），Ishihara and Utsumi（2006）らによって，社会科学への応用がなされている。

本稿では，ファジィ値をもつ TU ゲームの基本的解概念である α 水準コアの基本的な性質，とりわけ非ファジィ値の TU ゲームとの関係を明らかにすることを目的とする。取り掛かりとして，$\dfrac{1}{2}$ 水準コアとコアの同値性，ε コアとの同値性を証明し，その応用として存在証明を与える。通常の TU ゲーム同様平衡条件を満たせば α 水準コアが存在し，またそのときに限られることが示される。また，提携を考えたロールズ型社会的選択とも呼べる最大 α 水準コアの存在についても議論し，破産問題型ゲームへの応用を試みる。

本稿の構成は下記のようになっている。次節にてファジィ値をもつ TU ゲームを紹介する。3節にて，基本的な解概念である α 水準コアを定義し，存在や TU ゲームとの比較などの基本的な性質を明らかにする。4節にて応用例を紹介し，5節にて Shapley 値や仁といった他の解概念との比較検討を含め，帰結や展望について議論する。

2　ファジィ値をもつ TU ゲーム

N をプレーヤーの集合とし，$\mathcal{N}$ によって，N の非空な部分集合を表す。$\mathcal{N}$ の要素 S を提携と呼ぶ。$v: \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ は対応で，$v(S)$ によって提携 S のみで獲得できるであろうと予想する利得の集合を表す。すべての提携 S について $v(S)$ が一点で与えられると，TU ゲームに帰着される(1)。各提携が独力で獲得できる値から構成されるのが TU ゲームである。提携 S のみで獲得できるであろう利得の集合に対して，S にとってどれぐらい実現が可能なのか，又，どの程度満足を与えるのかなど，集合に対して中間的な水準を与えるのがファジィの考え方である。

定義 1．ファジィ値をもつ TU ゲームとは，$\mathcal{F} = (N, v, \{\mu_{A(S)}\}_{S \in \mathcal{N}})$ で記述され，それぞれ，

1．$N = \{1, \ldots, n\}$ をプレーヤーの集合，
2．$v: \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ をファジィ値をもつ特性対応，
3．$\mu_{A(S)}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ をメンバーシップ関数とする。

ここで，記号 $A(S) \subset \mathbb{R}$ は，提携 S が $v(S)$ の下で想定する実現可能性，不満や満足水準などを表すファジィ集合である。対応するメンバーシップ関数 $\mu_{A(S)}$ によって，$A(S)$ の達成具合や満足度を測る。例えば，$v(S) = a$ と一点で与えられる場合，$\mu_{A(S)}(a)$ のみを 1 とみなすと，a が確実に実現される，もしくは，a を得ることで十分満足である等と解釈でき，TU ゲームを記述できる。

メンバーシップ関数によって，$v(S)$ の実現可能の水準や満足度の水準などのあいまいさを表現できることから，上記のゲームはファジィ値をもつ TU ゲームと呼ばれている。ファジィ集合の詳細については，Zadeh (1965) や水本 (1992) などに委ねるとして，次節ではファジィ値をもつ TU ゲームの基本的な概念ではあるが未知の性質についていくつか紹介する。

最初に，代表的なメンバーシップ関数の形状とその解釈を考える。図 1 や図 2 のような右上がり形状のメンバーシップ関数は，1 が満足，0 が不満と解釈される。図 1 は，ファジィ集合 $A(S)$ に対して提携 S の得られる値が大きい程，その提携の満足度が増大し，逆に，提携 S の得られる値が小さい程，その提携は不満に感じることを意味する。図 2 の線分によるメンバーシップ関数は，一定の割合で満足水準が上昇し，ある一定以上の取り分を得ると，提携 S は十分に満足な状態にあると解釈される。図 3 のように釣鐘型のメンバーシップ関数は，ファジィ集合 $A(S)$ の実現可能性を表すと解釈できる。中央周辺の実現度が高く，広がるにつれてその実現度が低くなるという意味を持つ。

(1)　TU ゲームにおける解の性質等については，Peleg and Sudhhölter (2003) などに詳細な解説がなされている。

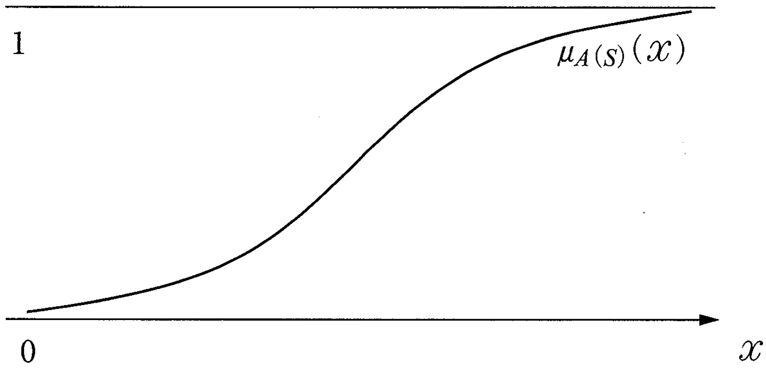

図１：漸近するメンバーシップ関数

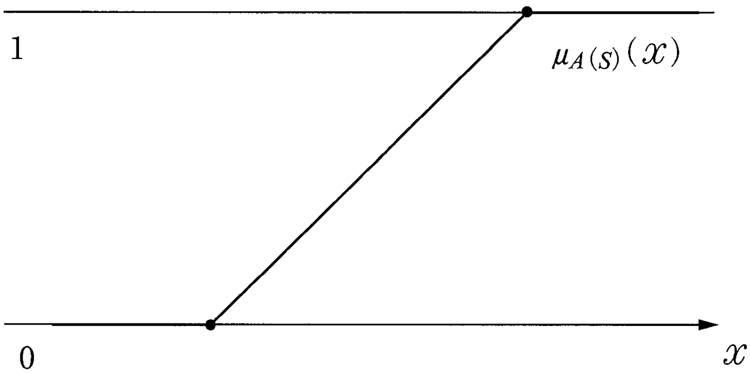

図２：線分によるメンバーシップ関数

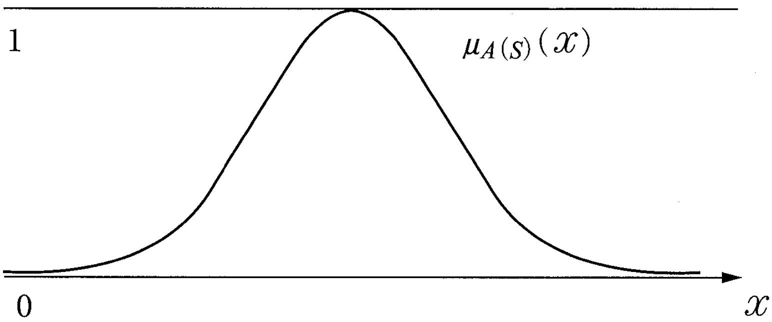

図３：実現可能性を表すメンバーシップ関数

例１． $N = \{1,2,3\}$ をプレーヤーの集合とし，ファジィ値をもつ特性関数を

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } |S| = 3 \\ [\frac{1}{2}, 1] & \text{if } |S| = 2 \\ 0 & \text{if } |S| = 1 \end{cases}$$

とする。ここで $|S|$ は提携 S のメンバー数を表す。全員が協力して働くと１の利得を獲得できるが，個人では何も獲得できない。２人が協力する場合には $\frac{1}{2}$ 以上１以下の利得

を獲得できる。2人協力の時は，何らかの不確定要素からあいまいな予想を形成せざるを得ないとする。

次に，このゲームが与えられた下での各提携のファジィ集合 $A(S)$ と対応するメンバーシップ関数 $\mu_{A(S)}$ を明示的に与える。例えば，

$$A(S) = \begin{cases} [1,\infty) & \text{if } |S| = 3 \\ [\frac{1}{2},\infty) & \text{if } |S| = 2 \\ [0,\infty) & \text{if } |S| = 1 \end{cases}$$

と，

$$\mu_{A(S)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [1,\infty) \quad \text{if } |S| = 3 \\ 1 & \text{if } x \in [\frac{1}{2},\infty) \quad \text{if } |S| = 2 \\ 1 & \text{if } x \in [0,\infty) \quad \text{if } |S| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。この場合，メンバーシップ関数は，図1から図3とは異なる形状になっている。各提携は，最低限度獲得できる利得を得られると最も満足するが，最低限度獲得できる利得を下回ると不満に感じる。もしくは，最低限度獲得できる利得は確実に実現でき，それを下回る状況は決して起こりえないとも解釈できる。

本論文では「$v(N)$ は**一点集合**」を仮定する。しかしながらこの仮定は，Ishihara and Utsumi（2006）にて紹介されているように多くの場合自然にみたされる。また，右上がりの形状をもつメンバーシップ関数を念頭に置き，満足水準という解釈を与えるものとする。従って，ファジィ集合 $A(N)$ に対応するメンバーシップ関数 $\mu_{A(N)}$ は，$v(N)$ の値以上の範囲にて1，それ以外は0という形状を考え，以降では特に明記しないこととする。

3　α水準コアと基本的性質

本論文の課題であるファジィ値をもつ TU ゲームのコアを考察する。メンバーシップ関数 $\mu_{A(S)}$ に対して，集合 $\{x \in \mathbb{R} | \mu_{A(S)}(x) \geq \alpha\}$ は $\mu_{A(S)}$ の α 水準の集合と呼ばれる。

定義2． ファジィ値をもつ TU ゲームの α 水準コアとは，

$$C_\alpha(\mu) = \left\{ (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i\in N} x_i = v(N),\ \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i) \geq \alpha \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

によって与えられる集合である。

α 水準コアとは，各提携において α 以上の満足水準が得られているならば，逸脱が発生しないような利得の集合を表している。逆に，話し合いによって提案された分配方法が α 水準コアに属さないというのは，あるグループにとってみると α の満足水準を得ることが

できず，そのグループの人々が提案された分配方法に異議を申し立てるという状況になる。このことから，α 水準コアに属する配分は，安定的な分配方法になっていると考えられる。定義より，0 水準コアは $C_0(\mu) = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{i \in N} x_i = v(N)\right.\right\}$ になる。すなわち，実行可能な配分の集合と等しく常に非空となる。

TU ゲームとファジィ値をもつ TU ゲームのコアの対応を確認する。(N, w) を TU ゲームとする。

すなわち，$w : \mathrm{N} \to \mathbb{R}$ を特性関数とする。TU ゲームのコアを $C(w) = \{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) \text{ for all } S\}$ と表記する。

w からファジィ値をもつ TU ゲームを下記のように構成する。$v(N) = w(N)$，任意の $S \neq N$ について $v(S) = [w(S) - a_S,\ w(S) + b_S]$ という区間とする。提携 S の満足を表すファジィ集合 $A(S) = [w(S) + b_S, \infty)$ に対応するメンバーシップ関数を

$$\mu_{A(S)}\Big(\sum_{i \in S} x_i\Big) = \begin{cases} 1 & \text{if} \sum_{i \in S} x_i > w(S) + b_S \\ \dfrac{\sum_{i \in S} x_i - w(S) + a_S}{a_S + b_S} & \text{if } w(S) - a_S \leq \sum_{i \in S} x_i \leq w(S) + b_S \\ 0 & \text{if } \sum_{i \in S} x_i < w(S) - a_S \end{cases}$$

と特定化する。この手順で構成されたゲームを**「ファジィ化された TU ゲーム」**と呼ぶこととする。

命題 1．(Ishihara and Utsumi (2006))

TU ゲーム (N, w) からファジィ化された TU ゲーム $(N, v, \{\mu_{A(S)}\})$ について，任意の S について，$a_S = b_S$ ならば TU ゲーム (N, w) のコアと $\frac{1}{2}$ 水準コアが等しくなる。

命題 2．

任意の S について，$a_S + b_S = c$ とする。このとき，TU ゲーム (N, w) における ε コアと (N, w) からファジィ化された TU ゲーム $(N, v, \{\mu_{A(S)}\})$ の $\frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{a})$ 水準コアが等しくなる。

これらの命題から，図 2 のような線分による右上がり型のメンバーシップ関数を用いると，ファジィ値をもつ TU ゲームの α 水準コアは，TU ゲームのコアと一致することがわかる。このような整合性から，本稿では，線分による右上がり型のメンバーシップ関数を基本的な形状として考えることとする。

仮定 1．

すべての $S \neq N$ においてメンバーシップ関数 $\mu_{A(S)} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ は連続関数で，増加関数 $f_S(t)$ を使って，

$$\mu_{A(S)}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t>x_r\\ f_S(t) & \text{if } x_l\le t\le x_r\\ 0 & \text{if } t<x_l\end{cases}$$

と表される。ただし，$x_l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，$x_r\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$とする[(2)]。
仮定１の条件から，$\mu^{-1}_{A(S)}$ が存在することがわかる。$\mu^{-1}_{A(S)}$ の唯一の連続選択肢 f_S^{-1} を用いて，記号の乱用ではあるが $\mu^{-1}_{A(S)}=f_S^{-1}$ と定義する。つまり，$\mu^{-1}_{A(S)}$ を関数として扱うこととする。

定義３． α を０に近づけたときの α 水準コアを以下のように定義し，0^+ 水準コアと呼ぶ。

$$C_{0^+}(\mu)=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{i\in N}x_i=v(N),\ \sum_{i\in S}x_i\ge\mu^{-1}_{A(S)}(0)\text{ for all } S\subsetneq N\right\}$$

定義からわかるように，$C_{0^+}(\alpha)$ は $C_0(\alpha)$ の部分集合になっている。また，$C_{0^+}(\alpha)$ は空集合になりうる。

命題３．
TU ゲーム (N, w) からファジィ化された TU ゲーム $(N, v, \{\mu_{A(S)}\})$ について，任意の S について，$a_S=0$ ならば TU ゲーム (N, w) のコアと 0^+ 水準コアが等しくなる。

命題４．
仮定１と $\alpha\ne0$ の下で，$w(N)=v(N)$, $w(S)=\mu^{-1}_{A(S)}(\alpha)$ と定義する。このとき，$C_\alpha(\mu)=C(w)$ が成立する。

命題４を用いると，ファジィゲーム v の α 水準コアが非空となる条件が得られる。N の部分集合族 $\mathcal{B}$ を平衡集合族，すなわち，すべての $S\in\mathcal{N}$ と $i{\in}N$ に対して $\sum_{\substack{S\in\mathcal{B}\\ S\ni i}}\lambda_S=1$ を満たすような正数の組 $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{B}}$ が存在するような部分集合族とする。

命題４より，次の性質が Bondareva と Shapley の定理より明らかとなる。

性質１． 仮定１と $\alpha\ne0$ の下で，任意の平衡集合族 $\mathcal{B}$ について，$\sum_{S\in\mathcal{B}}\lambda_S\mu^{-1}_{A(S)}(\alpha)\le v(N)$ が成り立つならばそのときに限り，$C_\alpha(\mu)$ が非空になる。

命題４． ファジィ値をもつ TU ゲーム $(N,v,\{\mu_{A(S)}\}_{S\in\mathcal{N}})$ の最大 α 水準コアとは，

$$\bar{\alpha}:=\max_{\alpha:C_\alpha(\mu)\ne\emptyset}\alpha$$

と定義される $\bar{\alpha}$ 水準コア $C_{\bar{\alpha}}(\mu)$ である。

$\mathcal{F}$ をファジィ値をもつ TU ゲームとする。$v(N)$ が一点という仮定から，$\mathcal{F}$ の下での実行可能な配分の集合を

$$X(\mathcal{F})=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{i\in N}x_i=v(N)\right\}$$

(2) $x_l=-\infty$, $x_r=\infty$ の場合，メンバーシップ関数 $\mu_{A(S)}$ は，図１のように０と１に漸近することを意味している。

と定義できる。

命題5.

仮定1の下で，次の命題が成立する。

(1) $\bar{\alpha} = \max_{x \in X(\mathcal{F})} \min_{S \subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i \in S} x_i)$ となる。

(2) 最大 α 水準コアが存在する。

(3) ファジィ値をもつ TU ゲームについて，$C_{\bar{\alpha}}(\mu) = \bigcap_{\alpha : C_\alpha(\mu) \neq \emptyset} C_\alpha(\mu)$ が成立する。

命題5の(1)は，最も冷遇されている提携の人々の満足水準を最大にすることを意味する。すなわち，最大 α 水準コアは，ロールズ的な状況を想定していると解釈できる。このことより，最大 α 水準コアが一点になる状況では，最大 α 水準コアを利用することで提携の逸脱を考慮に入れたロールズ的な社会選択が実行可能になるとも解釈できる。

4 応用例

最大 α 水準コアが一点となる応用例として3人破産問題型ゲームをあげる(3)。プレーヤーの集合を $N = \{1, 2, 3\}$，3人の分け前を Vとする。一人で獲得できるであろう利得は，多くても M_i，少なくとも m_i 確保できるとする。$V > M_i > m_i > 0$ を仮定する。逆に，残りのプレーヤー達 $N \backslash \{i\}$ が協力して達成できるであろう利得は，多くて $V - m_i$，少なくとも $V - M_i$ という状況を考える。

すなわち，ファジィ値をもつ特性関数が

$$v(S) = \begin{cases} V & \text{if } S = N \\ [m_i, M_i] & \text{if } S = \{i\} \\ [V - M_i, V - m_i] & \text{if } S = N \setminus \{i\} \end{cases}$$

となるようなファジィ値をもつ TU ゲームを考察する。

線分のメンバーシップ関数を，次のように特定化する。一人提携の場合は，

$$\mu_{A(\{i\})}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i > M_i \\ \dfrac{x_i - m_i}{M_i - m_i} & \text{if } m_i \leq x_i \leq M_i \\ 0 & \text{if } x_i < m_i \end{cases}$$

とする。また，i を除いた2人提携 $N \backslash \{i\} = \{j, k\}$ の場合は，

(3) Thomson (2003) に破産問題型ゲームに関してサーベイされている。

$$\mu_{A(N\setminus\{i\})}(x_j + x_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i > V - m_i \\ \dfrac{x_j + x_k - (V - M_i)}{M_i - m_i} & \text{if } V - M_i \leq x_i \leq V - m_i \\ 0 & \text{if } x_i < V - M_i \end{cases}$$

とする。

α 水準コアを求める。定義より，

$$C_\alpha(\mu) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = V, \\ x_j + x_k \geq V - \alpha m_i - (1-\alpha) M_i \text{ for all } i, j, k \in N, \\ x_i \geq (1-\alpha) m_i + \alpha M_i \text{ for all } i \in N \end{array} \right\}$$

となる。

命題 6 .

3 人破産問題型のゲームにおいて最大 α 水準コアは一点になる。

命題 7 .

3 人破産問題型のゲームにおいて最大 α 水準コアは

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{V-m}{M-m}(M_i - m_i) + m_i & \text{if } V \neq \dfrac{M+m}{2} \\ \dfrac{M_i - m_i}{2} & \text{if } V = \dfrac{M+m}{2} \end{cases}$$

と定まる。

命題 5 より，命題 7 の分配は 3 人のうちで最も満足度が低いプレーヤーの満足度が最大になるというロールズ的な選択となっていると解釈される。

5　帰結と展望

本稿では，α 水準コアの基本的な性質を示すとともに，TU ゲームとの関係を明らかにした。主要な帰結をまとめる。$\dfrac{1}{2}$ 水準コアやと TU ゲームのコア，ε コアとの同値性を示した。これらの同値性の条件から，平衡条件下での α 水準コアの存在を明らかにした。逆に，ファジィ値をもつ TU ゲームから TU ゲームを近似し，0^+ 水準コアとコアが同値であることを示した。更に，社会的選択としての応用が見込まれる提携を含むロールズ的な社会的選択と解釈できる最大 α 水準コアの存在を考察，連続増加なメンバーシップ関数ならば最大 α 水準コアが存在することを明らかにした。その具体例として破産問題型ゲームをあげ，最大 α 水準コアが一意になる性質や配分を示した。

複雑な現代社会では不確定要素が大きくあいまいな状況でしか表現し得ない事柄も多数存在し得る。あいまいな社会問題を分析するにあたって，本稿で展開したファジィ値をもつ TU ゲーム的な考え方は，社会現象を捉える手法の一つとして活躍の場を広げていく

と思われる。例えば，協調ゲームなどの戦略形ゲームの問題は，相手がどのように行動してくるかに応じて，自分たちのとりうる利得が変わってくる。つまり，プレーヤーの予想の方法によって，各プレーヤーの確保できる利得に違いが出てくる。このため，幅をもつ予想とα水準コアの概念を応用することで，協調ゲームや囚人のジレンマゲームにおける，協調の可能性ひいてはその達成度や満足度などが分析されると考えられよう。

最後に，今後の残されたいくつかの課題について展望する。α水準コアの概念をShapley 値や仁に適応することでα水準 Shapley 値やα水準仁を定義できる。TU ゲームの Shapley 値をϕ，仁をNuとする。この時，α水準コアと同様にしてファジィ値をもつTU ゲームのα水準 Shapley 値を$\phi(\mu_{A(S)}^{-1})$によって与えられる値とし，また，ファジィ値をもつ TU ゲームのα水準仁を$Nu(\mu_{A(S)}^{-1})$によって与えられる値とする。命題1より，下記の命題が直ちに導出される。

命題8．
TU ゲーム(N, w)における Shapley 値や仁は(N, w)からファジィ化された TU ゲーム$(N, v, \{\mu_{A(S)}\})$の$\dfrac{1}{2}$水準 Shapley 値，$\dfrac{1}{2}$水準仁にそれぞれ等しくなる。

これらの単純な応用には問題点もはらんでいる。α水準の意味である。本来 Shapley 値や仁は配分が一意に決まるという重要な性質がある。しかしながら，α水準ごとに一意に決まったとしても，そのαの意味とはなにか，満足度なのか実現可能度なのかいずれの解釈も不十分さを多分に含む。Molina and Tejada (2002) らはα切断を介さずに，ファジィ値をもつ TU ゲームから直接，仁のような解概念を提案しその性質を明らかにしている。今後はこのような，α切断を介さない解概念の提案，考察が必要であろう。更には，効用の移転が不可能は NTU ゲームでの問題などが今後解決されるべき問題と考えられる。

補論

本節で示された命題の証明をおこなう。

証明．命題1の証明

(N, w)をファジィ化した TU ゲームの$\dfrac{1}{2}$水準コアを求めると

$$C_{\frac{1}{2}}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \mu_{A(S)}(\sum_{i \in S} x_i) \geq \frac{1}{2} \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

となる。$\mu_{A(S)}$の定義と$a_S = b_S$より，$\mu_{A(S)}(\sum_{i \in S} x_i) \geq \dfrac{1}{2}$を満たすのは$\sum_{i \in s} x_i \geq w(S)$の時のみである。従って，$C_{\frac{1}{2}}(\mu)$は，

$$C_{\frac{1}{2}}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

と表される。よって，$C_{\frac{1}{2}}(\mu) = C(w)$を得る。

証明．命題 2 の証明

(N, w) をファジィ化した TU ゲームの α 水準コアを求めると，

$$\begin{aligned} C_\alpha(\mu) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \mu_{A(S)}(\sum_{i \in S} x_i) \geq \alpha \text{ for all } S \subsetneq N \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) - c + 2c\alpha \text{ for all } S \subsetneq N \right\} \end{aligned}$$

となる。また，(N, w) の ε コアは

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) - \varepsilon \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

である。よって，$\varepsilon = c - 2c\alpha$，つまり $\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\varepsilon}{c})$ のときに，$C_\alpha(\mu)$ と (N, w) の ε コアが一致する。よって示せた。

証明．命題 3 の証明

(N, w) をファジィ化した TU ゲームの 0^+ 水準コアを求めると，

$$C_{0^+}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq \mu^{-1}_{A(S)}(0) \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

となる。$a_S = 0$ より，$\mu^{-1}_{A(S)}(0) = w(S) - a_S = w(S)$ を満たす。よって，

$$C_{0^+}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) \text{ for all } S \subsetneq N \right\}$$

と表される。よって，$C_{0^+}(\mu) = C(w)$ を得る。

証明．命題 4 の証明

仮定 1 の条件から，$\mu_{A(S)}$ の逆像が存在することがわかる。任意の $\alpha \in (0, 1)$ について，

$$\begin{aligned} C_\alpha(\mu) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = v(N), \mu_{A(S)}(\sum_{i \in S} x_i) \geq \alpha \text{ for all } S \subsetneq N \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq \mu^{-1}_{A(S)}(\alpha) \text{ for all } S \subsetneq N \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = w(N), \sum_{i \in S} x_i \geq w(S) \text{ for all } S \subsetneq N \right\} \\ &= C(w) \end{aligned}$$

となる。これより，題意は示せた。

証明．命題５(1)の証明

メンバーシップ関数 $\mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i)$ が非減少関数より，任意の i とある M_i について，$x_i \geq M_i$ と $\mu_{A(S)}(\sum_{j\in S} x_j) = \min_{T\subsetneq N} \mu_{A(T)}(\sum_{j\in T} x_j)$ を満たす $S \neq \{i\}$ が存在する。この M_i を使い，集合 X を

$$X := \{(x_1, ..., x_n) \in X(\mathcal{F}) \mid x_i \leq M_i \text{ for all } i \in N\}$$

と定義する。

このとき，$y_i > M_i$ を満たす任意の $y \in X(\mathcal{F})$ に対し，

$$z_j = \begin{cases} y_j + \frac{y_j - M_i}{n-1} & \text{if } j \neq i \\ M_i & \text{if } j = i \end{cases}$$

とおくと，$\mu_{A(S)}$ は非減少関数より，

$$\min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} y_i) \leq \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} z_i)$$

となる。よって，

$$\sup_{x\in X(\mathcal{F})} \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i) = \max_{x\in X} \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i)$$

を得る。ここで，$X \subset X(\mathcal{F})$ であることに注意すると，$\min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(x)$ は，$x \in X(\mathcal{F})$ において最大値をもつことがわかる。

そこで，$\alpha^* = \max_{x\in X(\mathcal{F})} \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i)$ とおく。次に，$C_{\alpha^*}(\mu) \neq \emptyset$ を示す。先程の証明より，$\alpha^* = \mu_{A(S^*)}(\sum_{i\in S} x_i)$ を満たすような $x^* \in X(\mathcal{F})$ と $S^* \subsetneq N$ が存在する。このとき，

$$\mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i) \geq \mu_{A(S^*)}(\sum_{i\in S^*} x_i) = \alpha^*$$

が，任意の $S \subsetneq N$ に対して成立するので，$x^* \in C_{\alpha^*}(\mu)$ を得る。

最後に，$\alpha > \alpha^*$ のとき，$C_\alpha(\mu) \neq \emptyset$ となることを示す。背理法を利用し，$x \in C_\alpha(\mu)$ が存在すると仮定する。これより，$x \in X(\mathcal{F})$ を満たす。また，任意の $S \subsetneq N$ に対し，$\mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i) \geq \alpha \geq \alpha*$ となるので，

$$\min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i) > \alpha^*$$

を満たす。このことは，$\alpha*$ が $\max_{x\in X(\mathcal{F})} \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(x)$ であることに矛盾する。

以上より，$\bar{\alpha} = \max_{x\in X(\mathcal{F})} \min_{S\subsetneq N} \mu_{A(S)}(\sum_{i\in S} x_i)$ であることが示せた。

命題5(2)の証明

命題5(1)より，$\bar{\alpha}$が存在するので，最大α水準コアが存在する。

命題5(3)の証明

$\alpha > \alpha'$のときに，$C_\alpha(\mu) \subset C_{\alpha'}(\mu)$を示せばよい。ここで，$\mu^{-1}_{A(S)}$は$[0, 1]$上で増加関数なので，$\mu^{-1}_{A(S)}(\alpha) > \mu^{-1}_{A(S)}(\alpha')$であることに注意をすると，

$$\begin{aligned} x \in C_\alpha(\mu) &\iff \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq \mu^{-1}_{A(S)}(\alpha) \quad \text{for all } S \subsetneq N \\ &\implies \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i > \mu^{-1}_{A(S)}(\alpha') \quad \text{for all } S \subsetneq N \\ &\iff x \in C_{\alpha'}(\mu) \end{aligned}$$

を得る．よって，$\displaystyle\bigcap_{\alpha: C_\alpha(\mu) \neq \emptyset} C_\alpha(\mu) = C_{\bar{\alpha}}(\mu)$を満たす。

証明．命題6の証明

下記の3つの平衡集合族を考察すればよい。

(i)平衡集合族が $\{\{i\}, \{j\}, \{k\}\}$ **の場合**

$$x_i + x_j + x_k \geq (1-\alpha)\sum_{i \in N} m_i + \alpha \sum_{i \in N} M_i \tag{1}$$

(ii)平衡集合族が $\{\{i\}, \{j, k\}\}$ **の場合**

$$x_i + x_j + x_k \geq V + (2\alpha - 1)(M_i - m_i) \tag{2}$$

(iii)平衡集合族が $\{\{i, j\}, \{j, k\}, \{i, k\}\}$ **の場合**

$$\frac{1}{2}(x_i + x_j) + \frac{1}{2}(x_j + x_k) + \frac{1}{2}(x_k + x_i) \geq \frac{3}{2}V - \frac{\alpha}{2}\sum_{i \in N} m_i - \frac{1-\alpha}{2}\sum_{i \in N} M_i \tag{3}$$

よって，(1)より$\alpha \leq \dfrac{V-m}{M-m}$，(2)より$\alpha \leq \dfrac{1}{2}$，(3)より$\alpha \leq \dfrac{M-V}{M-m}$を得る。それぞれの場合について$x_i$を計算する。

(i) $V < \dfrac{M+m}{2}$のとき$\alpha = \dfrac{V-m}{M-m}$となるので，

$$x_i = \frac{V-m}{M-m}(M_i - m_i) + m_i$$

と求まる。

(ii) $V = \dfrac{M+m}{2}$のとき，$\alpha = \dfrac{1}{2}$となるので，

$$x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$$

と求まる。

(iii) $V > \dfrac{M+m}{2}$ のとき，$\alpha = \dfrac{M-V}{M-m}$ となるので，

$$x_i = \frac{M-V}{M-m}(M_i - m_i) + m_i$$

と求まる。従って，いずれの場合も1点になることが示せた。

参考文献

Aubin. J., P. 1981. "Cooperative Fuzzy Game.", *Math. of Operations Research* 6 (1): 1-13.

Ishihara, S., and Y,. Utsumi, 2006 " Alternative Interpretation of a Bankruptcy Problem from the Talmud in Fuzzy Valued TU Game" *Sociological Theory and Methods* Vol.21, No.1, 93-107

Mareš. M., 2000. "Fuzzy Coalition Structures.", *Fuzzy Sets and Systems* 114 : 23-33.

Mareš. M., 2001. *Fuzzy Cooperative Games : Cooperation with Vague Expectations,* Physica Verlag

水本雅晴（編）1992『ファジィ集合 講座ファジィ第2巻』日刊工業新聞社。

Molina. E., and J., Tejada 2002 "The Equalizer and the Lexicographical Solutions for Cooperative Fuzzy Games : Characterization and Properties" *Fuzzy Sets and Systems* 125, 369-387.

Nishizaki I, and M., Sakawa, 2000. "Fuzzy Cooperative Games Arising from Linear Production Programming Problem with Fuzzy Parameters.", *Fuzzy Sets and Systems* 114 : 11-21.

西崎一郎，坂和正敏 1992「*n* 人協力ゲームにおけるファジィ決定に基づく解の概念」『日本ファジィ学会誌』Vol.4, 316-324

Peleg. B., and P., Sudhölter, 2003. *Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Thomson. W., 2003. " Axiomatic and Game-theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems : a Survey.", *Mathematical Social Sciences* 45: 249-297.

Zadeh. L. A. 1965. "Fuzzy Sets.", *Information and Control* 8 : 338-353.

〔抄　録〕

本稿の主要な目的は，ファジィ値をもつTUゲームの基本的な解概念であるα水準コアの基本的な性質を明らかにすることである。主要な帰結は，α水準コアの存在，TUゲームのコアとの比較，最大α水準コアの存在である。とりわけ最大α水準コアは，提携を含むロールズ的社会的選択と解釈でき，その応用例として破産問題型ゲームを紹介する。
キーワード：ファジィゲーム，α水準コア，破産問題型ゲーム

The purpose of this paper is to clarify some basic properties on the alpha-cut core, which is the basic solution concept on fuzzy valued TU games. The main concern of our paper is to prove the existence of the alpha-cut core or the maximum alpha-cut core. Especially, the maximun alpha-cut core can be applied to coalitional social welfare problems as Rawlsian social choice correspondence. We will apply it to the bankruptcy problem.