公共財の自発的貢献モデルにおける効率性と所得再分配

岡　崎　哲　郎*

1．序

実際の社会生活の中で，公共の利益のために各主体の個人的な貢献が必要とされるという状況は数多く存在する。これは一つの組織の中においてもあり得るし，社会全体の問題としてもあり得る。

そこで必要とされる各主体の貢献量をある主体が計算し，その上でその貢献量を各主体に強制できるのであれば問題は生じない。ただし，実際には必要とされる貢献量を計算することは困難である。それ以上に，たとえ公共の利益のためであっても，各主体に貢献を強制することは，社会における自由を失わせることになるであろう。

そこで社会的にはジレンマが生じる。各主体に貢献を強制することは自由を損なわせることが明らかである。しかし，なんらの強制力が存在しなければ，公共の利益のために積極的に貢献する主体が存在したとしても，一方でフリー・ライドする主体が多数現れてくるであろう。正に，自由を尊重することが放縦を許すこととなる。

経済学においては，このような公共の利益を公共財の供給問題として扱ってきたし，その中でフリー・ライド問題が重要視されてきた。メカニズム・デザインの研究はこのような問題意識の下で発展してきたといえる(1)。これらの研究では，各主体の個人的な誘因と両立するようなメカニズムの設計が試みられてきた。実際，誘因両立的で，ある基準の下で望ましい資源配分を実現することが可能である様々なメカニズムが提案されてきている。このことは，メカニズムを適切に設計すれば，各主体が自ら進んで公共の利益のために貢献し，しかもその結果は社会的に効率的なものになることを意味する。逆に言うと，公共の利益の実現のために各主体の貢献が必要であるならば，メカニズム設計を適切に行わなければ，各主体の誘因と社会的効率性が必ずしも両立はしない。

ところで，メカニズム・デザインの研究で扱われるメカニズムは多くの場合は極めて複雑なものとなる。そこでより現実な設定における個人の誘因と公共の利益の関係に対する研究が一方で試みられることになる。

公共財の自発的貢献もモデルは，そのような研究の中に位置づけられよう。そこでは，各主体の自発的な貢献によって公共財の供給が決定される。その際に特に複雑なメカニズムは設定されない。各主体は，自らの初期資源を，個人的な私的財の消費に振り向けるか，

＊　本稿は，Japan Economic Policy Association 4th International Conference（December 17-18，2005）での発表論文 Jun Iritani and Shin-ichi Yamamoto “The Private Provision of Public Goods: Neutrality, Efficiency, Equity and Population”の討論者を務めたさいの山本真一氏との議論を機会として作成された。議論の相手をして下さった山本氏に感謝します。

(1)　例えば Moore（1992）や Palfrey（1992）参照。

公共の利益となる公共財への自発的貢献に振り向けるかを決定するだけである。各主体は，自らが必要と考える範囲で公共財への貢献をする。ただし，一方で他の主体の貢献にフリー・ライドする誘因も持つわけである。

当然，フリー・ライダー問題は解決されていないので，各主体の貢献量は社会的に効率的な水準を下回るであろう。ただし，このモデルの均衡の性質を調べることによって，個人の誘因と社会的効率性の乖離が一般的に存在する，ということを多くの人たちに認識させることができる。もし個人の誘因と社会的効率性の乖離が存在しなければ，現在我々を悩ます多くの社会的問題が自ずと解決されていることであろう。

個人の誘因と社会的効率性の乖離が存在することを認識することによって，社会的問題に取り組む出発点が得られるのである。そこから，例えば，自発的な貢献をいかにして社会的に効率的な方向へ導いていくことができるかという問題を考察することができる。

公共財の自発的貢献モデルに関しては従来から様々な分析がなされてきた。その中でも，公共財の水準が所得分配の影響を受けない，という中立性定理は重要な帰結といえよう(2)。

中立性定理が成り立つ場合，所得再分配をしても，均衡における公共財の水準は変化しなくなってしまう。ただし，この帰結には幾つかの前提条件が必要となる。中立性定理が成り立つ条件や，中立性定理が成り立たないときの所得再分配と公共財の水準との関係についての基準となる分析結果が Bergstrom, Blume and Varian (1986) である。

本稿では，この Bergstrom, Blume and Varian (1986) での中立性定理を出発点として，所得再分配と公共財の水準との関係について，効用関数を特定化して上で分析する。その際に，Iritani and Yamamoto (2005) での分析が利用される。そこでは，一人の主体に所得を移転し，その結果パレート改善が実現できるか否かという問題を扱っている。本稿では，この Iritani and Yamamoto (2005) での分析結果を，効用関数をコブ＝ダグラス型に特定化した上で，さらに詳細に考察する。

2．基本モデル

この章では，基本モデルを説明する。ここでのモデルは基本的には Bergstrom, Blume and Varian (1986) や Iritani and Yamamoto (2005) と同様のものとなっている。

n 人の主体が存在するとして，主体の集合を $N=\{1,2,\cdots,n\}$ と表記する。公共財の水準を G と表す。各主体 $i\in N$ の私的財の消費量を x_i と表す。ここで公共財の自発的貢献を記述するため，各主体 i が自ら g_i だけの自発的貢献をし，公共財の水準が

$$G=\sum_{i=1}^{n} g_i$$

となると仮定する。

各主体 i の効用関数が

$$u=u(x_i,G)$$

と表現される場合を考える。この効用関数は通常の経済分析に見られる仮定を満たすとする。

各主体 i の所得を I_i とする。また所得分配を $I=\{I_1,\cdots,I_n\}$ と表記する。ここで各主体

(2) Warr (1982) や Bergstrome, Blume and Varian (1986) を参照。

の所得の合計をI^sと表記する（$I^s = \sum_{i=1}^{n} I_i$）。生産関数としては線形のものを考える。ここで私的財と自発的貢献財の限界変形率が1となるように単位が調整されているとする。これより完全競争市場の下では私的財と自発的貢献財の価格は1となる。各財の価格と各主体の所得は，各主体にとって所与であると仮定する。

ここで各主体iの行動は，$G_{-i} = \sum_{j \neq i} g_j$とすると，

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_i, g_i} \ u(x_i, g_i + G_{-i}) \\
&\quad \text{subject to } x_i + g_i = I_i \\
&\qquad\qquad\quad x_i \geq 0 \\
&\qquad\qquad\quad g_i \geq 0
\end{aligned}
$$

と表される。この問題の解を$(x_i, g_i) = (x_i(I_i, G_{-i}), g_i(I_i, G_{-i}))$と表記する。ここで各主体の最適な行動は他の主体の行動に依存している。そこで各主体iの行動が上述の最大化問題で記述できるゲームを考え，そのゲームのナッシュ均衡がこの自発的貢献モデルの均衡となると考える。

なお上述の最大化問題の解の解釈を容易にするために，

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_i, G} \ u(x_i, G) \\
&\quad \text{subject to } x_i + G = Y_i \\
&\qquad\qquad\quad x_i \geq 0 \\
&\qquad\qquad\quad G \geq 0
\end{aligned}
$$

という問題を考え，この問題の解を$(x_i, G) = (\xi_i(Y_i), \phi_i(Y_i))$と表記する。

これらの最大化問題の解$(x_i(I_i, G_{-i}), g_i(I_i, G_{-i}))$や$(\xi_i(Y_i), \phi_i(Y_i))$は，効用関数が標準的な仮定を満たすならば，連続関数となることが知られている。

ナッシュ均衡を$(x_i^*, g_i^*)_{i \in N}$と表記する。また均衡においてプラスの貢献をしている主体の集合をJ^*と表記する。また任意のiについて，$G_{-i}^* = \sum_{j \neq i} g_j^*$と$Y_i^* = I_i + G_{-i}^*$と定義する。すると，任意の$i \in J^*$について

$$
\begin{aligned}
x_i^* &= x_i(I_i, G_{-i}^*) = \xi_i(Y^*) \\
g_i^* &= g_i(I_i, G_{-i}^*) = \phi_i(Y^*) - G_{-i}^*
\end{aligned}
$$

が成り立ち，任意の$i \in N \setminus J^*$について

$$
\begin{aligned}
x_i^* &= x_i(I_i, G_{-i}^*) = I_i \\
g_i^* &= g_i(I_i, G_{-i}^*) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことが確認できる。

3．中立性定理

従来から，公共財の自発的貢献モデルにおいては，均衡における公共財の水準が所得分配から独立であるという中立性定理が成り立つことが知られている（Warr（1982）等を参照)。中立性定理の一つの標準的な記述が Bergstrom, Blume and Varian（1986）によるものである。まずこの Bergstrom, Blume and Varian（1986）による中立性定理を述べる。

可能な所得分配の集合を S と表記する。つまり $S=\{I=\{I_1,\cdots,I_n\}\in R^n_+ \mid \sum_{i\in N} I_i = I^s\}$ とする。二つの所得分配 $\hat{I}=\{\hat{I}_1,\cdots,\hat{I}_n\}\in S$ と $\tilde{I}=\{\tilde{I}_1,\cdots,\tilde{I}_n\}\in S$ を考える。$\hat{I}=\{\hat{I}_1,\cdots,\hat{I}_n\}$ の下での均衡における各主体 i の私的財の消費量と公共財への貢献量をそれぞれ $\hat{x}_i$ と $\hat{g}_i$，均衡における公共財の水準を $\hat{G}$ と表記し，$\tilde{I}=\{\tilde{I}_1,\cdots,\tilde{I}_n\}$ の下での均衡における各主体 i の私的財の消費量と公共財への貢献量をそれぞれ $\tilde{x}_i$ と $\tilde{g}_i$，均衡における公共財の水準を $\tilde{G}$ と表記する。また $\hat{I}=\{\hat{I}_1,\cdots,\hat{I}_n\}$ の下での均衡においてプラスの貢献をしている主体の集合を $\hat{J}$ と表記し，$\tilde{I}=\{\tilde{I}_1,\cdots,\tilde{I}_n\}$ の下での均衡においてプラスの貢献をしている主体の集合を $\tilde{J}$ と表記する。

定理 1（**Bergstrom, Blume and Varian（1986）**）
任意の $j\in\hat{J}$ について $\hat{I}_j-\tilde{I}_j<\hat{g}_j$ が成り立ち，任意の $i\in N\setminus\hat{J}$ について $\hat{I}_i=\tilde{I}_i$ が成り立つとする。この場合，任意の i について $\tilde{x}_i=\hat{x}_i$ が成り立ち，さらに $\tilde{G}=\hat{G}$ が成り立つ。

証明：Bergstrom, Blume and Varian（1986）参照。

この定理より，プラスの貢献をしている主体の中で所得再分配をし，しかもその際に，所得を減らす主体の所得の減少分がもともとの貢献量よりも小さいのであれば，このような所得再分配の後でも均衡での消費量や公共財の水準は変化しない。つまり所得分配が中立的となっている。

この中立性定理から次のことが分かる。もし所得再分配の規模がそれほど大きくないのであれば，各主体の私的財および公共財の消費量は所得再分配の影響を受けない。つまり所得再分配は各主体の効用，そして資源配分の効率性に影響を及ぼさない。そこで効率性と公平性の関係について，通常の私的財だけの経済の場合と異なった論点が生じる可能性が出てこよう。

ここで Iritani and Yamamoto（2005）に従って，この中立性定理と所得再分配や資源配分の効率性との関係について考察をする。任意の所得配分 $I=\{I_1,\cdots,I_n\}\in S$ の下での均衡における各主体 i の消費量と貢献量の組み合わせを $(x_i(I),g_i(I))$ と表記し，プラスの貢献をしている主体の集合を $J(I)$ と表記する。つまり $J(I)=\{J\in N \mid g_j(I)>0\}$ とする。ここで，均衡において全ての主体がプラス貢献をしている所得分配の集合を Z と表記する。つまり $Z=\{I\in S \mid J(I)=N\}$ と定義する。また，任意の所得配分

(3) パレート改善の記述方法は Iritani and Yamamoto（2005）と多少異なっている。Iritani and Yamamoto（2005）では，十分に小さな d に関して，$(\tilde{I}_1+(n-1)d,\tilde{I}_2-d,\cdots,\tilde{I}_n-d)$ の下での均衡は，$(\hat{I}_1,\cdots,\hat{I}_n)$ の下での均衡よりも，厳密な意味でパレート改善である，と記述している。

$I = \{I_1, \cdots I_n\} \in S$ の下での均衡における各主体 i の効用を $u_i(I)$ と表記する。
　ここで Iritani and Yamamoto (2005) における定理を再現する(3)。

定理2 (Iritani and Yamamoto (2005))
ある所得分配 $(\hat{I}_1, \cdots \hat{I}_n) \in S$ の下での均衡において全ての主体がプラスの貢献をしているとする。(i)所得分配の集合 Z の境界上に存在し，かつその所得分配の下の均衡においては一人の主体（主体1とする）だけがプラスの貢献をしているような所得分配 $(\tilde{I}_1, \cdots \tilde{I}_n) \in S$ が存在する。(ii) 任意の $T>0$ に対して，$(\tilde{I}_1 + T, \tilde{I}_2 - (T/(n-1)), \cdots, \tilde{I}_n - (T/(n-1))) \in S$ を所得再分配のルールとする。

$\dfrac{d\phi_1}{dY_1}(\tilde{I}_1) > 1/(n-1)$ が成り立つならば，任意の i について，$\dfrac{du_i(I)}{dT} > 0$ となる。

証明：Iritani and Yamamoto (2005) 参照。

　この定理における主体1は任意の主体でありうる。そこで特にこの主体1を最も所得の大きな主体と解釈し，Iritani and Yamamoto (2005) では，効率性と公平性の間にトレード・オフが存在することを指摘している。

4．コブ＝ダグラス型効用関数とパレート改善

　前章において，Bergstrom, Blume and Varian (1986) や Iritani and Yamamoto (2005) の結果を紹介し，効率性と公平性の間にトレード・オフが存在するという指摘に言及した。ただし定理2は，所得再分配とパレート改善との関係について述べたものであって，必ずしも公平性そのものを扱ったものではない。なるほどそこでは一人の主体に所得を移転するものとなっているが，その主体が，他の主体に比べて大きな所得を手にしているとは限らない。
　そこでこの章では，各主体の効用関数をコブ＝ダグラス型に特定化して，所得再分配とパレート改善の関係について考察し，その上で公平性についても議論をする。
　各主体 i の効用関数を，$0 < a_i < 1$ として，

$$u_i = x_i^{a_i} G^{1-a_i}$$

とする。各主体の問題は

$$\begin{aligned} &\max \ x_i^{a_i}(G_{-i}+g_i)^{1-a_i} \\ &\quad \text{subject to } \ x_i + g_i = I_i \\ &\qquad\qquad\qquad x_i \geq 0 \\ &\qquad\qquad\qquad g_i \geq 0 \end{aligned}$$

となる。この問題は

$$\max\ (I_i-g_i)^{a_i}(G_{-i}+g_i)^{1-a_i}$$
$$\text{subject to } g_i \geq 0$$

と書き換えられる。ここで制約条件を考えない最大化問題

$$\max\ (I_i-g_i)^{a_i}(G_{-i}+g_i)^{1-a_i}$$

を考えよう。この問題の解は，簡単な計算によって

$$g_i=(1-a_i)I_i-a_iG_{-i}$$

となることが確かめられる。これらより，実際の最大化問題の解は

$$g_i=\max\{0,(1-a_i)I_i-a_iG_{-i}\}$$

であることが分かる。

ここで一人の主体だけが貢献をしている均衡を記述する。一般性を失うことなく，主体1が均衡における唯一の貢献者であるとする。この場合

$$g_1=(1-a_1)I_1$$

となる。他の主体 i に関しては，$g_i=0$ となっていることから，

$$g_i=(1-a_i)I_i-a_ig_1=(1-a_i)I_i-a_i(1-a_1)I_1\leq 0$$

が成立している。これより，任意の $i\neq 1$ について

$$I_i\leq\frac{a_i}{1-a_i}(1-a_1)I_1$$

が成り立っている時に，主体1以外の全ての主体は貢献量がゼロとなる。

定理2の内容に対応させるために，特に以下の条件を満足する所得分配 $\tilde{I}=(\tilde{I}_1,\cdots,\tilde{I}_n)$ を考える。(i) $\tilde{I}$ は Z の境界上にある。(ii) $\tilde{I}$ の下では主体1のみが公共財に貢献している。

この場合，

$$\tilde{G}=\tilde{g}_1=(1-a_1)\tilde{I}_1$$

が成り立つことと，任意の $i\neq 1$ について

$$\tilde{I}_i=\frac{a_i}{1-a_i}(1-a_1)\tilde{I}_1$$

が成り立っていることが確認できる。また$\phi_1(Y_1)=(1-a_1)Y_1$であることから，

$$\frac{d\phi_1}{dY_1}(\tilde{I}_1)=1-a_1$$

が成り立つことも確認できる。

ここで，Iritani and Yamamoto (2005) と同様の所得再分配を考える。つまり新しい所得分配として$(\tilde{I}_1+T,\tilde{I}_2-(T/(n-1)),\cdots,\tilde{I}_n-(T/(n-1)))\in S$を考える。

この所得再分配とパレート改善に関して次の命題が成り立つ。

命題1

各主体iの効用関数を，$0<a_i<1$として，$u_i=x_i^{a_i}G^{1-a_i}$とする。ある所得分配$(\hat{I}_1,\cdots,\hat{I}_n)\in S$の下での均衡において全ての主体がプラスの貢献をしているとする。(i)所得分配の集合Zの境界上に存在し，かつその所得分配の下の均衡においては一人の主体（主体1とする）だけがプラスの貢献をしているような所得分配$(\tilde{I}_1,\cdots,\tilde{I}_n)\in S$が存在する。(ii)任意の$T>0$に対して，所得再分配のルールを$(\tilde{I}_1+T,\tilde{I}_2-(T/(n-1)),\cdots,\tilde{I}_n-(T/(n-1)))\in S$とする。任意の$i$について，$\frac{du_i(\tilde{I})}{dT}>0$となることの必要十分条件は$\frac{d\phi_1}{dY_1}(\tilde{I}_1)>1/(n-1)$である。

証明：任意の$i\neq 1$について，所得分配$\tilde{I}=(\tilde{I}_1,\cdots\tilde{I}_n)$の下での均衡における効用は，

$$u_i=\tilde{I}_i^{a_i}\Big((1-a_1)\tilde{I}_1\Big)^{1-a_i}$$

であることから，

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dT}&=a_i\tilde{I}_i^{a_i-1}\left(-\frac{1}{n-1}\right)(1-a_1)^{1-a_i}\tilde{I}_1^{1-a_i}+\tilde{I}_i^{a_i}(1-a_i)(1-a_1)^{1-a_i}\tilde{I}_1^{-a_i}\\&=(1-a_1)^{1-a_i}\tilde{I}_i^{a_i-1}\tilde{I}_1^{-a_i}\left\{(1-a_i)\tilde{I}_i-\left(\frac{1}{n-1}\right)a_i\tilde{I}_1\right\}\end{aligned}$$

となる。ここで$(1-a_i)\tilde{I}_i=a_i(1-a_1)\tilde{I}_1$が成り立つことから，

$$\frac{d\phi_1}{dY_1}(\tilde{I}_1)=1-a_1>\frac{1}{n-1}$$

であることが，所得再分配が厳密な意味でのパレート改善であることの必要十分条件となっていることが分かる。　証明終了

Iritani and Yamamoto (2005) では$\phi_1'(\hat{I}_1)>1/(n-1)$が厳密な意味でのパレート改善の十分条件となっていたが（定理2参照），ここでは$\phi_1'(\hat{I}_1)>1/(n-1)$が厳密な意味でのパレート改善の必要十分条件となる(4)。

ここでの所得再分配は，主体1に所得を移転し，その移転を残りの主体で均等に負担す

る形であった。より一般的な所得再分配のルールを考えることもできる。今までと同様に主体1に所得を移転する状況を考え，$(\widetilde{I}_1+T,\widetilde{I}_2-t_2T,\cdots,\widetilde{I}_n-t_nT)\in S$ で所得再分配を記述する。ここで $(t_2,\cdots,t_n)$ は $t_i\geq 0$ と $\sum_{i\neq 1}t_i=1$ を満たす定数である。ここで次の命題が成立する。

命題2 (5)

各主体 i の効用関数を，$0<a_i<1$ として，$u_i=x_i^{a_i}G^{1-a_i}$ とする。ある所得分配 $(\widehat{I}_1,\cdots,\widehat{I}_n)\in S$ の下での均衡において全ての主体がプラスの貢献をしているとする。(i)所得分配の集合 Z の境界上に存在し，かつその所得分配の下の均衡においては一人の主体（主体1とする）だけがプラスの貢献をしているような所得分配 $(\widetilde{I}_1,\cdots,\widetilde{I}_n)\in S$ が存在する。(ii)任意の $T>0$ に対して，所得再分配のルールを $(\widetilde{I}_1+T,\widetilde{I}_2-t_2T,\cdots,\widetilde{I}_n-t_nT)\in S$ とする。ある $(t_2,\cdots t_n)$ の下で，任意の i について $\dfrac{du_i(\widetilde{I})}{dT}>0$ となることの必要十分条件は $\dfrac{d\phi_1}{dY_1}(\widetilde{I}_1)>1/(n-1)$ である。

証明：命題1より，$\phi_1'(\widetilde{I}_1)>1/(n-1)$ が成り立つならば，任意の i について $t_i=1/(n-1)$ とすることにより，$du_i/dT>0$ が成り立つ。

任意の $i\neq 1$ について，

$$
\begin{aligned}
\frac{du_i}{dT}&=a_i\widetilde{I}_i^{a_i-1}(-t_i)(1-a_1)^{1-a_i}\widetilde{I}_1^{1-a_i}+\widehat{I}_i^{a_i}(1-a_i)(1-a_1)^{1-a_i}\widetilde{I}_1^{-a_i}\\
&=(1-a_1)^{1-a_i}\widetilde{I}_i^{a_i-1}\widetilde{I}_1^{-a_i}\{(1-a_i)\widetilde{I}_i-t_ia_i\widetilde{I}_1\}\\
&=(1-a_1)^{1-a_i}\widetilde{I}_i^{a_i-1}\widetilde{I}_1^{-a_i}a_i\widetilde{I}_1\{(1-a_i)-t_i\}
\end{aligned}
$$

となる。任意の $i\neq 1$ について $du_i/dT>0$ ならば，任意の $i\neq 1$ について $1-a_1>t_i$ となる。よって $(n-1)(1-a_1)>\sum_{i\neq 1}t_i=1$ が成り立ち $\phi_1'(\widetilde{I}_1)=1-a_1>1/(n-1)$ を得る。

証明終了

以上の結果より，一人の主体に所得を集める形で所得の再分配をすることによって，厳密な意味でパレート改善が実現できることが理解できる。この帰結から，公共財の自発的貢献モデルでは効率性と公平性のトレード・オフが存在すると解釈できる。これが Iritani

(4) パレート改善を本稿の形で記述した場合，定理2のように，より一般的な効用関数を考えた場合でも，$\phi_1'(\widetilde{I}_1)>1/(n-1)$ が厳密な意味でのパレート改善の必要十分条件となる。

事実，各主体 i の均衡での効用は $u_i(\widetilde{I}_i,\phi_1(\widetilde{I}_1))$ となり，$\widetilde{I}$ が Z の境界上にあることと，一階の条件である $\partial u_i/\partial x_i=\partial u_i/\partial G$ が成り立つことから，

$$\frac{du_i}{dT}=\frac{\partial u_i}{dx_i}\left(-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial G}\frac{d\phi_i}{dI_1}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\frac{d\phi_1}{dI_1}-\frac{1}{n-1}\right)$$

となり，$\phi_1'(\widetilde{I}_1)>1/(n-1)$ が厳密な意味でのパレート改善の必要十分条件となる。

(5) 脚注4と同様に，ここでの結果は，一般的な効用関数の下でも成立する。

and Yamamoto (2005) 等によって従来から指摘されてきた事実であろう。

ただし，ここでの主体1が他の主体に比べて所得が大きいとは限らない。この点を明らかにするために次の数値例を考える。

主体の数は3とする。そこで各主体 i の効用関数のパラメータ a_i について，$a_1 < 0.5$，$a_2 > 1/(2-a_1)$，$a_3 > 1/(2-a_1)$ が成り立つとする。

$a_1 < 0.5$ より，$\phi_1'(\widehat{I}_1) = 1-a_1 > 1/(n-1)$ が成り立ち，パレート改善の必要十分条件が成立している。$\widehat{I}_2 = (a_2/(1-a_2))(1-a_1)\widehat{I}_1$ と $a_2 > 1/(2-a_1)$ より，$\widehat{I}_2 > \widehat{I}_1$ が成り立つ。同様に $\widehat{I}_3 = (a_3/(1-a_3))(1-a_1)\widehat{I}_1$ と $a_3 > 1/(2-a_1)$ より，$\widehat{I}_3 > \widehat{I}_1$ が成り立つ。

以上より，この数値例では，主体1の所得が最も小さく，しかも主体1が唯一の貢献者となっている。その上で主体1へ所得を移転することによってパレート改善が可能となる。最も所得の小さな主体に所得を移転することによってパレート改善が実現するわけである。つまりここでは効率性と公平性が両立している。

このように，所得移転がパレート改善につながるか否かという問題は，公平性を犠牲にするか否かという問題と必ずしもつながるわけではない。基本的には，最も公共財に対しての評価が大きな主体に所得を移転することがパレート改善につながっていると考えられる。

以上の議論では，Z の境界上にある所得分配に焦点を当てて，更なる所得再分配とパレート改善との関係について考察してきた。ただし，ただ一人の主体が公共財に対して貢献しているような所得分配が必ず Z の境界上にあるとは限らない。そこでより広い範囲の所得分配を取り上げて，所得再分配とパレート改善の関係を考察する。

現在の所得分配 $\widehat{I} = (\widehat{I}_1,\cdots,\widehat{I}_n)$ の下で主体1だけが公共財に貢献しているとする。ただしこの所得分配が Z の境界上にあるとは仮定しない。そこで，主体1以外の主体から主体1へ所得を移転する所得再分配ルールを，ある $(t_2,\cdots,t_n)$ と任意の $T > 0$ に対して $(\widetilde{I}_1+T,\widetilde{I}_2-t_2T,\cdots,\widetilde{I}_n-t_nT) \in S$ とする。

この所得再分配とパレート改善の関係について次の命題が成り立つ。

命題3

各主体 i の効用関数を，$0 < a_i < 1$ として，$u_i = x_i^{a_i}G^{1-a_i}$ とし，現在の所得分配が $\widehat{I} = (\widehat{I}_1,\cdots,\widehat{I}_n) \in S$ とし，均衡において主体1だけが公共財に貢献しているとする。ある $(t_2,\cdots,t_n)$ と任意の $T > 0$ に対して所得再分配のルールを $(\widetilde{I}_1+T,\widetilde{I}_2-t_2T,\cdots,\widetilde{I}_n-t_nT) \in S$ とする。任意の $i \neq 1$ について，

$$\widehat{I}_i > t_i\left(\frac{a_i}{1-a_i}\right)\widehat{I}_1$$

が成り立つ場合，主体1以外の主体から主体1への所得再分配は厳密な意味でのパレート改善となる。

証明：任意の $i \neq 1$ について，所得分配 $\widehat{I} = (\widehat{I}_1,\cdots,\widehat{I}_n)$ の下での効用は，

$$u_i = \widehat{I}_i^{a_i}\left((1-a_1)\widehat{I}_1\right)^{1-a_i}$$

であることから，

$$\frac{du_i}{dT} = a_i\tilde{I}_i^{a_i-1}(-t_i)(1-a_1)^{1-a_i}\tilde{I}_1^{1-a_i} + \hat{I}_i^{a_i}(1-a_i)(1-a_1)^{1-a_i}\tilde{I}_1^{-a_i}$$
$$= (1-a_1)^{1-a_i}\hat{I}_i^{a_i-1}\hat{I}_1^{-a_i}\left\{(1-a_i)\hat{I}_i - t_i a_i \hat{I}_1\right\}$$

となる。これより，任意の $i \neq 1$ について，

$$\hat{I}_i > t_i\left(\frac{a_i}{1-a_i}\right)\hat{I}_1$$

が成り立つ場合，主体1以外の主体から主体1への所得再分配は厳密な意味でのパレート改善となる。　証明終了

また，ここまでの議論の導出過程を解釈することによって，以下の事実を導き出すことができる。

命題4

各主体 i の効用関数を，$0 < a_i < 1$ として，$u_i = x_i^{a_i}G^{1-a_i}$ とし，現在の所得分配が $\hat{I} = (\hat{I}_1, \cdots, \hat{I}_n) \in S$ とし，均衡において主体1だけが公共財に貢献しているとする。ある $(t_2, \cdots, t_n)$ と任意の $T > 0$ に対して所得再分配のルールを $(\tilde{I}_1 + T, \tilde{I}_2 - t_2T, \cdots, \tilde{I}_n - t_nT) \in S$ とする。ここで，任意の $i \neq 1$ について，

$$\hat{I}_i = t_i\left(\frac{a_i}{1-a_i}\right)\hat{I}_1$$

が成り立つならば，主体1が公共財に貢献する範囲内での任意の所得再分配の下で，パレート改善は不可能である。

以上の命題における主体1を任意の主体 i に書き換えても，同様の結果が成り立つ。この結果，もし主体 i に所得を移転することによってパレート改善が可能であるとしても，その移転の規模には制限が加えられることが分かる。事実，I_i が増える場合には，必ず I_j は減少する。そのため，I_i が十分に大きくなってしまえば，$I_j < t_j(a_j/(1-a_j))I_i$ となり，逆に主体 i の所得を減らす方向へ再分配する方がパレート改善となる。

5．結語

本稿では，効用関数をコブ＝ダグラス型に特定化した上で，公共財の自発的貢献モデルにおける所得再分配とパレート改善との関係について考察した。

従来，公共財の自発的貢献モデルでは，効率性と公平性のトレード・オフが指摘されてきた。例えば Bergstrom, Blume and Varian（1986）では，各主体が同じ効用関数を持

つ場合，所得分配をより平等にすることによって公共財の水準が大きくなることはない，といった事実が証明されている。

Iritani and Yamamoto（2005）でも，効率性と公平性のトレード・オフを強調する。このトレード・オフの存在は事実であろうし，重要な問題であろう。ただし，本稿での数値例で示されたように，定理2（Iritani and Yamamoto（2005）における Theorem 5）もしくは本稿での命題は，必ずしもそのトレード・オフを証明したものではない。

これらの帰結から言えることは，公共の利益の実現を個人の自発的貢献を通じて実現しようとする場合には，公共の利益をより重視する主体へ所得を移転すべきである，ということである。この公共の利益をより重視する主体が，本稿では $\phi_i'(\tilde{I}_1) > 1/(n-1)$ が成り立つ主体である。結果的にその主体の所得が増えるとしても，これは所得分配の公平性の問題とは別問題であろう。

もちろん，公共財の自発的貢献モデルにおいて，効率性と公平性のトレード・オフが存在しないと主張しているのではない。効率性を重視することが，特定の主体への所得移転を正当化するとしても，この所得移転が公平性の観点から問題ないとは言えない。この問題は，単にパレート改善を基準として資源配分を評価するのではなく，何らかの社会的厚生関数を用いて評価する必要が出てこよう。この問題は今後の課題としたい。

参考文献

Andreoni, J. (1989), "Giving with Impure Altruism: Application to Charity and Ricardian Equivalence," *Journal of Political Economy*97,1447-1458.

Bergstrom, T. C.,L. Blume, and H. R. Varian (1986), "On the Private Provision of Public Goods," *Journal of Public Economics*29, 25-49.

Iritani, J. and S. Yamamoto (2005), "The Private Provision of Public Goods: Neutrality, Efficiency, Equity and Population," presented at Japan Economic Policy Association 4 th International Conference.

Moore, J. (1992), "Implementation, Contracts, and Renegotiation in Environments with Complete Information," in J. J. Laffont eds. *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress,* 182-282.

Palfrey, T. (1992), "Implementation in Bayesian Equilibrium: The Multiple equilibrium Problem in Mechanism Design," in J. J. Laffont eds. *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*,283-323.

Warr, P. G. (1982), "Pareto Optimal Redistribution and Private Charity,"*Journal of Public Economics*19,131-138.

Warr, P. G. (1983), "The Provision of a Public Good is a Independent of the distribution of Income,"*Economics Letters* 13,207-211.