〔研究ノート〕

二部グラフの均等彩色アルゴリズム

宮　田　大　輔

1　はじめに

本論文ではループや多重辺のない有限無向グラフ $G = (V, E)$ を扱う。ここで V, E はそれぞれグラフ G の頂点集合および辺集合を表す。

グラフ G の頂点を，隣接するどの 2 頂点も異なる色を持つように，k 色で塗り分けるとき，この着色を G の k-彩色と呼ぶ。G が k-彩色可能であるような最小の自然数 k を，G の染色数とよび $\chi(G)$ で表す。また，グラフ G の均等 k-彩色とは，各色で塗られた頂点の個数が高々1 しか違わないような G の k-彩色のことをいう。G が均等 k-彩色可能であるような最小の k を均等染色数とよび $\chi_e(G)$ で表す。ここで定義されないグラフ理論の用語や記号などは，参考文献 [4] などを参照するとよい。

グラフの彩色は研究が盛んな分野であり，実用的な応用も多い。応用例の 1 つにスケジューリング問題がある。例えば，仕事を頂点とし，同時に実行できない仕事を辺で結んだグラフが k-彩色可能ならば，並列に k ステップ以内で全ての仕事を終えることが保証できる。もし，グラフが均等 k-彩色可能であれば，各タイムステップでの負荷を均等化できる。

与えられたグラフ G が（均等）k-彩色可能かどうか判定する問題は NP-完全であり，$\chi(G)$ および $\chi_e(G)$ を求める問題は NP-困難である [6]。したがって一般的なグラフを彩色する実用的なアルゴリズムが得られる可能性はほとんどない。しかしながら，グラフに対して何らかの制限を加えれば，グラフが（均等）k-彩色可能であるかどうかを判定する実用的なアルゴリズムが得られる場合がある。

本論文では，$G = (V, E)$ を完全二部グラフ $K_{2n+1,2n+1}$ でない最大次数 Δ をもつ連結二部グラフで，$\Delta \leq k$ のときに $O(|V| + |E|)$ ステップで G を均等 k-彩色するアルゴリズムを与える。また $K_{2n+1,2n+1}$ については $O(|V|)$ ステップでを均等 $(k+1)$-彩色するアルゴリズムを与える。

2　関連研究

2.1　最大次数と彩色

グラフ G の最大次数を Δ とするとき，次の定理が知られている。

定理 A (Greedy Coloring Theorem)
$\Delta \leq k$ ならば，G は $(k+1)$-彩色可能である。

定理 A に関しては，貪欲法を用いれば $O(|V|+|E|)$ 時間でグラフを $(\Delta+1)$-彩色することが可能である。

G が完全グラフまたは奇閉路の場合，$\chi(G)=\Delta+1$ であるから，定理 A の “$(k+1)$-彩色” を “k-彩色” に置き換えることはできない。その意味で定理 A はギリギリであるが，実はこれらの例外を除けば，$\chi(G)\le\Delta$ であることが Brooks によって示されている。

定理 B (Brooks[2])
G を奇閉路でも完全グラフでもない連結グラフとするとき，$\Delta\le k$ ならば $\chi(G)\le k$ である。

定理 B に関しては，2001 年に Baetz ら [1] が，Lovász[12] の証明をもとに，$\Delta\le k$ であるようなグラフ G を k-彩色する $O(|V|+|E|)$ 時間のアルゴリズムを与えている。

2.2 最大次数と均等彩色

次の定理は定理 A の均等彩色版である。1964 年に Erdös [5] によって予想され，1970 年に Hijnal と Szemerédi によって証明された。

定理 C (Hijnal, Szemerédi [8])
$\Delta\le k$ ならば，G は均等 $(k+1)$-彩色可能である。

定理 C に関する多項式時間アルゴリズムが与えられたのは，比較的最近のことである。2008 年に Kierstead と Kostochoka[9] は，最大次数が高々k であるグラフを均等 $(k+1)$-彩色する多項式時間（$O(|V|^5)$）アルゴリズムが存在することを示した。その後，Kierstead ら [10] は時間計算量を $O(k|V|^2)$ まで改善している。

次の予想は，1973 年に Meyer によって提出された。この予想は，もし正しければ定理 B よりも強い。

予想 D (Meyer[13])
G を奇閉路でも完全グラフでもない連結グラフとするとき，$\Delta(G)\le k$ であれば $\chi_e(G)\le k$ である。

2.3 特別なグラフ族と均等彩色

予想 D は未解決であるが，いくつかのグラフ族については予想 D が成立することが示されている。

グラフが木の場合については，Meyer が予想 D を提出した論文の中で次の定理を与えた（ただし，その証明には誤りがあったため，Eggleton がそれを修正したことが Guy によって報告されている）。

定理 E (Meyer[13], Eggleton[7])
T を木とするとき，$k\ge\lceil\Delta/2\rceil+1$ ならば，T は均等 k-彩色可能である。

木が均等 k-彩色可能であるための必要十分条件は 1994 年に Chen らによって与えられている（筆者らも独立に同値な必要十分条件を与えている [14]]）。

定理 F (Chen, Lih[3])
T を 2 部グラフとみたときの部集合を X, Y とする。T が均等 k-彩色可能であるための必要十分条件は，
(i) $||X| - |Y|| \leq 1$ のとき，$k \geq 2$ であり，
(ii) $||X| - |Y|| > 1$ のとき，
　$k \geq \max\{3, \lceil (n+1)/(\alpha(T - N(v)) + 2 \rceil\}$ である。

ここで，v は T の最大次数を持つ任意の頂点であり，$\alpha(T - N(v))$ は，T から v とそれに隣接する頂点を除去して得られる部分グラフの独立数である。

定理 F に関して，木 T と自然数 k が与えられたとき，T が均等 k-彩色可能かどうか判定し，可能な場合その彩色を与える $O(|V|)$ 時間のアルゴリズムが筆者によって与えられている [15]。

1996 年に Lih らは，予想 D が G が連結二部グラフの場合について成立することを示した。

定理 G (Lih, Wu[11])
G を完全二部グラフ $K_{n,n}$ でない連結二部グラフとするとき，G は均等 Δ-彩色可能である。

完全二部グラフ $K_{n,n}$ は均等 2-彩色可能であるから，上の定理によって連結二部グラフの場合には，$\Delta \leq k$ ならば $\chi_e(G) \leq k$ であることが示されたことになる。

3　アルゴリズム

本論文では，Lih らの証明 [11] に基づいて，G を最大次数 Δ をもつ連結二部グラフとし，$\Delta \leq k$ のときに G を均等 k-彩色するアルゴリズムを構成する。

その前に本アルゴリズムの例外となる完全二部グラフ $K_{n,n}$ と偶サイクル C_{2n} の自明な均等彩色について検討する。

完全二部グラフ $K_{n,n}$ は $\chi_e(K_{n,n}) = 2$ であり，n が偶数であれば自明な（各部集合を 2 頂点ずつに分割した）均等 Δ-彩色が存在し，n が奇数であれば均等 Δ-彩色は不可能である。しかし $\Delta \leq k$ のとき $K_{n,n}$ は n が偶数であっても奇数であっても均等 $(k+1)$-彩色が可能である。この場合，各色で塗る頂点数は 0,1 点もしくは 1,2 点であり，少なくとも 1 つの色は 1 頂点だけを塗ればよい。1 つの部集合から 2 点ずつ同じ色塗っていき 2 点塗るべき色がなくなったり頂点数が奇数だった場合には 1 点だけ塗るという方法を用いれば $O(|V|)$ ステップで均等彩色可能である。

偶サイクル C_{2n} は $\chi_e(C_{2n}) = 2$ であり，自明な（各部集合がそのまま 1 色となるような）均等 Δ-彩色が存在する。また $\Delta \leq k$ ならば C_{2n} は均等 k-彩色することが可能である。例えば，C_{2n} の各頂点をサイクルに沿って順に $1, 2, \ldots, k, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ のように循環的に色を使って塗っていき，最後の頂点が最初の頂点と同じ色 (1) になる場合には，最後の頂点を 2 で塗る。この方法を用いれば $O(|V|)$ ステップで均等 k-彩色可能である。

本アルゴリズムでは G として $K_{n,n}$ および C_{2n} と同型ではないものだけを考える。

定理 1 $G=(V,E)$ を完全二部グラフ $K_{n,n}$ でも偶サイクル C_{2n} でもない連結な二部グラフとする。$\Delta \leq k$ ならば，$O(|V|+|E|)$ ステップで G を均等 k-彩色することが可能である。

いま，二部グラフ G の部集合を X, Y とし，$|X|=m \geq n=|Y|$ とする。各頂点は $1,\ldots,k$ で彩色されるものとし，色 j で彩色される頂点の数を $p_j=\lceil(m+n-j+1)/k\rceil$ $(j=1,\ldots,k)$ とする。ここで $\sum p_j=m+n$ かつ $|p_i-p_j|\leq 1$ であることは容易に確かめられる。グラフ G のデータ構造は隣接リスト方式で与えられ，$X, Y, m, n, \Delta, k, p_j (j=1,\ldots,k)$ は大域的に定義されているものとする。

グラフ G が $K_{n,n}$ および C_{2n} ではない最大次数 Δ の連結二部グラフであるときに，G を均等 k-彩色するアルゴリズムを図 1 に示す。ここで，$N(v)$ は v と隣接する頂点の集合（v 自身は含まれない）を表し，$N(S)$ は少なくとも 1 つの $v \in S$ と隣接する頂点の集合を表す。また $\deg(v)=|N(v)|$ は頂点 v の次数（v に接続する辺の数）を表す。

```
p := 0
j := 0
while (p + p_{j+1} ≤ m){
   j := j + 1
   p := p + p_j
}
if (p = m){
   Color(X, 1, j)
   Color(Y, j+1, k)
} else {
   s := m − p
   t := p_k − s
   if (m − (t(Δ − 1) + 1) ≥ s) {
      Let v ∈ Y be a vertex
      T := Subset(Y, v, t)
      Let S be a subset of X s.t. |S| = s, S ∩ N(T) = φ
   } else {
      Let v ∈ X be a vertex s.t. deg(v) is the minimum
      S' := Subset(X, v, s − 1)
      Let u ∈ X − S' be a vertex s.t. |N(S') ∩ N(u)| is the maximum
      S := S' ∪ {u}
      Let T be a subset of Y s.t. |T| = t, T ∩ N(S) = φ
   }
   Color(X − S, 1, p)
   Color(Y − T, p+1, k − 1)
   Color(S ∪ T, k, k)
}
```

図 1: 二部グラフを均等 k-彩色するアルゴリズム

`Color(`V`,`i`,`j`)` は与えられた頂点集合 V の各頂点を色 $i,\ldots,j$ $(i \leq j)$ を用いて $p_i,\ldots,p_j$ 個ずつ彩色する手続きである。図 2 に手続きの詳細を示す。`Color` は $O(|V|)$ ステップで実行可能である。

```
Color(V, i, j) {
  p := 0
  foreach(v ∈ V){
    color v with i
    p := p + 1
    if (p = p_i) i := i + 1
  }
}
```

図 2: V を色 $i, \ldots, j$ で $p_i, \ldots, p_j$ 個ずつ着色する手続き

`Subset(`V`,`v`,`s`)` は V の部分集合 $S \subset V$ を，$v \in S, |S| = s$ かつ $\langle S \cup N(S) \rangle$ が連結となるように S をもとめる手続きである。ここで $\langle S \rangle$ は S で誘導される G の部分グラフを表す。図 3 に手続きの詳細を示す。`Subset` は頂点を格納する 1 つのスタックをもち，`push` と `pop` 操作が可能であるものとする。`Subset` は v からの深さ優先探索であるから最悪でも $O(|V| + |E|)$ ステップで実行可能である。なお，`Subset` の 7 行目で $v \in V$ か否かを判定する部分があるが，あらかじめ各頂点が X, Y のどちらに属しているかをラベル付をしておけば $O(1)$ で判定できる。またそのようなラベル付は $O(|V| + |E|)$ ステップで実行可能である。

```
1:  Subset(V, v, s) {
2:    S := φ
3:    label v as visited
4:    push v
5:    while (s ≠ 0) {
6:      pop v
7:      if (v ∈ V){
8:        S := S ∪ {v}
9:        s := s - 1
10:     }
11:     foreach (u ∈ N(v)) {
12:       if (u is not labeled as visited) {
13:         label u as visited
14:         push u
15:       }
16:     }
17:   }
18:   return S
19: }
```

図 3: $|S| = s$ かつ $\langle N(S) \cup S \rangle$ が連結となるような V の部分集合 S を求める

主処理の 16 行目で T と隣接しない頂点を X から s 個選択する処理があるが，S の各頂点から隣接する頂点に対してマークを付けたのち，マークのついていない頂点を選べばよいからこの処理も $O(|V|+|E|)$ ステップで実行可能である。また，18 行目の次数最小の頂点を選択する処理は $O(|V|+|E|)$ ステップで実行可能である。20 行目の処理は，X の各頂点にカウンタを持たせ，S' の各頂点から隣接する頂点のカウントを 1 つ増やすという処理を行った後，カウント最大の頂点を選べばよいからこの処理も $O(|V|+|E|)$ ステップで実行可能である。

したがって，本アルゴリズムは $O(|V|+|E|)$ ステップで実行可能である。

4　アルゴリズムの正当性

本節で，提案したアルゴリズムが正しく彩色を行うことを検証する。

まず，図 1 の 7 行目で $p=m$ のケースを考える。このときは，$|X|=m=p_1+p_2+\cdots+p_j$ かつ $|Y|=p_{j+1}+\cdots+p_k$ となっているので，手続き Color を用いて，X を色 $1,\ldots,j$ を用いてそれぞれ $p_1,\ldots,p_j$ 個ずつ彩色し，Y を色 $j+1,\ldots,k$ を用いてそれぞれ $p_{j+1},\ldots,p_k$ 個ずつ彩色すればよい。

$p<m$ の場合は，$s=m-p$，$t=p_k-s$ として，図 4 のように X から s 個の頂点と Y から t 個の頂点を独立となるように選ぶことができれば均等 k-彩色が完成する。

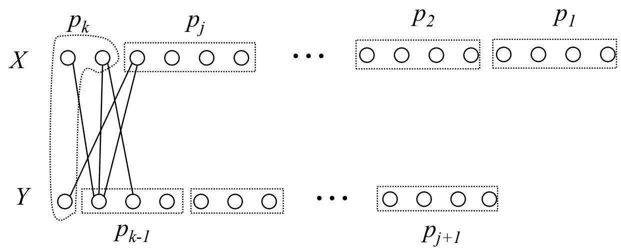

図 4: $p_k=s+t$ 個の頂点

もし $m-(t(\Delta-1)+1)\geq s$ であれば，任意の頂点 $v\in Y$ を選び，$|T|=t, v\in T$ かつ $\langle T\cup N(T)\rangle$ が連結となるように $T\subset Y$ を選ぶ。G は連結であるから，このような T を手続き Subset を用いて選ぶことが可能である。このように T を選べば，$|N(T)|\leq t(\Delta-1)+1$ である。よって，T のどの頂点とも隣接しない s 個の頂点が X の中に存在する。したがってこのケースでは均等 k-彩色が可能である。

$m-(t(\Delta-1)+1)\leq s-1$ のときは $n-s(\Delta-1)\geq t$ が成立する。もしそうでないとすると，$m-(t(\Delta-1)+1)\leq s-1$ と $n-s(\Delta-1)\leq t-1$ を加えて，$(m+n-1)/\Delta\leq s+t$ を得る。ところが，$s+t=p_k=\lceil(m+n-k+1)/k\rceil=\lfloor(m+n)/k\rfloor\geq(m+n)/\Delta$ となり矛盾である。

いま $v\in X$ を $\deg(v)$ が最小となるように選び，手続き Subset を用いて，v から深さ優先探索で $v\in S', |S'|=s-1$ となる頂点集合 $S'\subset X$ を取得する。また，u を $|N(S')\cap N(u)|$

が最大になるように選び，$S = S' \cup \{u\}$ とする。G が連結であるからこのような S は必ず選ぶことができ，$|N(S') \cap N(u)| \geq 1$ である。

もし，$n - |N(S)| \geq t$ となることが示されれば，主処理 22 行目で必ず T を取得することが可能であり，アルゴリズムの正当性が証明されたことになる。

もし $\deg(v) < \Delta$ ならば $|N(S)| \leq s(\Delta - 1)$ であるから，G は正しく均等 k-彩色される。よって $\deg(v) = \Delta$ と仮定する。もし $m > n$ ならば $\deg(v) < \Delta$ となる頂点が存在するはずであるから $m = n$ であり，G は Δ-正則グラフであることがわかる。また G は偶サイクルではないと仮定しているので $\Delta \geq 3$ である。

$|N(S)| \leq s(\Delta - 1)$ ならば $n - |N(S)| \geq t$ であるから，$|N(S)| = s(\Delta - 1) + 1$ と仮定すると，$|N(S')| = (s - 1)(\Delta - 1) + 1$ かつ $|N(S') \cap N(u)| = 1|$ である。このとき，$n - (s(\Delta - 1) + 1) \geq t$ が成り立つことを証明する。

$n - (s(\Delta - 1) + 1) \leq t - 1$ であるとして矛盾を示す。$n - (s(\Delta - 1) + 1) \leq t - 1$ と $n-(t(\Delta-1)+1) \leq s-1 = m-(t(\Delta-1)+1) \leq s-1$ を加えると，$2n/\Delta \geq s+t$ を得る。一方 $s+t = p_k = \lfloor 2n/k \rfloor$ であるから，$k = \Delta$ であり $2n$ は Δ の倍数である。また s と t の決め方から $s = t = n/\Delta$ である。ここで $X - S'$ と $Y - N(S')$ の間の辺の数を考えると，$X - S'$ の各頂点からは少なくとも $\Delta - 1$ 本の辺が $Y - N(S')$ と接続し，$Y - N(S')$ の各頂点からは高々Δ 本の辺しか $X - S'$ に接続しないから $(n-s+1)(\Delta-1) \leq (n-(s-1)(\Delta-1)-1))\Delta$ となる。$s = n/\Delta$ を用いると，$(\Delta - n)(\Delta^2 - 3\Delta + 1) \geq 0$ を得る。ところが，G は $K_{n,n}$ ではないので $\Delta < n$ であり，$\Delta \geq 3$ のとき $\Delta^2 - 3\Delta + 1 > 0$ であるから矛盾である。したがって $n - (s(\Delta - 1) + 1) \geq t$ であり，$n - |N(S)| \geq t$ となるからアルゴリズムが正しく均等 k-彩色を行うことが示された。

5 おわりに

グラフ G が $K_{n,n}$ でも C_{2n} でもない連結二部グラフで，最大次数が高々k のときに $O(|V| + |E|)$ ステップで G を均等 k-彩色するアルゴリズムを与えた。$K_{n,n}$ については，n が偶数のとき $O(|V|)$ ステップで均等 k-彩色し，n が奇数の時は $O(|V|)$ ステップで均等 $(k+1)$-彩色する方法を示した。また C_{2n} については $O(|V|)$ ステップで均等 k-彩色する方法を示した。本アルゴリズムの対象となるグラフでは $|E| \leq \Delta|V|/2, \Delta \leq k$ であるから，計算量は $O(|V| + |E|) = O(k|V|)$ である。

一般のグラフでは，Kierstead ら [10] らが最大次数が高々k であるグラフを $O(k|V|^2)$ ステップで均等 $(k+1)$-彩色するアルゴリズムを提案しているが，グラフが二部グラフの場合には，本アルゴリズムを用いれば，より高速に計算することが可能であり，さらに奇数の完全二部グラフを除いて色数を 1 つ減らすことができる。

また，一般的な二部グラフを表現するのに $O(|V| + |E|)$ の記憶領域が必要であることは明らかであるから，本アルゴリズムの計算量はオーダー的に最善である。

参考文献

[1] B. Baetz and D. R. Wood (2001), "Brooks' vertex colouring theorem in linear time", Technical Report CS-AAG-2001-05, The University of Sidney.

[2] R. L. Brooks (1941), "On coloring the nodes of a network", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37**, pp.194–197.

[3] B. L. Chen and K. W. Lih (1994), "Equitable coloring of trees", *J. Combin. Theory Ser.B* **61**, pp.83–87.

[4] R. Diestel (1997), *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York.

[5] P. Erdös (1964), Problem 9, in "Theory of Graphs and its Applications" (M. Fieldler, Ed.), Czech Acad. Sci. Publ., Prague, p.159.

[6] M. R. Garey and D. S. Johnson (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, New York.

[7] R. K. Guy (1975), "Monthly reserch problems, 1969–1975", *Amer. Math. Monthly* **82**, pp.995–1004.

[8] A. Hajnal and E. Szemerédi (1970), "Proof of a conjecture of Erdös", *Combinatorial Theory and Its Applications, II* (Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 4), North-Holland, pp.601–623.

[9] H. A. Kierstead and A. V. Kostochka (2008), "A short proof of the Hajnal-Szemerédi theorem on equitable colouring", *Combinatorics, Probability and Computing* **17**, pp.265–270.

[10] H. A. Kierstead, A. V. Kostochka, M. Mydlarz and E. Szemerédi (2010), "A fast algorithm for equitable coloring", *Combinatoria* **30**, pp.217–224.

[11] K. W. Lih (1996) and P. W, Wu, "On equitable coloring of bipartite graphs", *Discrete Math.* **151**, pp.155–160.

[12] L. Lovász (1975), "Three short proofs in graph theory", *J. Combin. Theory Ser. B* **19**, pp. 269–271.

[13] W. Meyer (1973), "Equitable coloring", *Amer. Math. Monthly* **80**, pp.920–922.

[14] 宮田大輔，金子篤司，徳永伸一 (1993), "均等彩色可能な tree の必要十分条件", 日本数学会 1993 年度年会 応用数学分科会 講演アブストラクト，pp.41–42.

[15] 宮田大輔 (2013), "木と均等彩色する線形時間アルゴリズム", 第 8 回 パーソナルコンピュータ利用技術学会全国大会 講演論文集，pp.185–188.

（2015.7.20 受稿，2015.8.4 受理）

〔抄　録〕

グラフ G の頂点を，隣接するどの 2 頂点も異なる色を持つように，k 色で塗り分けるとき，この着色を G の k-彩色という。また，各色で塗られた頂点の個数が高々1 しか違わないような G の k-彩色を G の均等 k-彩色という。

Hajnal ら (1970) は最大次数が高々k であるグラフが均等 $(k+1)$-彩色可能であることを証明し，Kierstead ら (2010) が最大次数が高々k である位数 n のグラフを $O(kn^2)$ ステップで均等 $(k+1)$-彩色するアルゴリズムを与えている。また，Lih ら (1996) は G を完全二部グラフ $K_{m,m}$ でない連結二部グラフとし，G の最大次数を Δ とするとき，G は均等 Δ-彩色可能であることを示した。

本論文では，Lih らの証明をもとに，完全二部グラフ $K_{2m+1,2m+1}$ を除いて，最大次数が高々k である連結二部グラフを $O(kn)$ ステップで均等 k-彩色するアルゴリズムを与える。